Το μικρό εγχειρίδιο των μαθηματικών της Γ' λυκείου

Σύντομες σημειώσεις

Α. Φράγκος

Προσοχή

Οι σύντομες αυτές σημειώσεις δεν γράφτηκαν για να είναι πλήρες βοήθημα στη μελέτη. Είναι συνοπτικές για να μπορούν να καλυφθούν σε εύλογο χρονικό διάστημα, και περιέχουν κάποιες εισαγωγικές έννοιες για μαθήματα τύπου ≪Απειροστικού λογισμού Ι≫, της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Στην ουσία, είναι μία υπενθύμιση της ύλης των μαθηματικών της Γ' Λυκείου, με προσθήκες ≪Απειροστικού λογισμού Ι≫.

Προτεινόμενη βιβλιογραφία:

- Από τη Γ' Λυκείου, όχι πολλά πράγματα, καθώς υπάρχει (κατά τη γνώμη μου) ≪ασκησεοκρατεία≫, σε βάρος των ιδεών και της θεωρίας.
  - Α.Σ., Κ.Β., Μ.Σ., Μ.Κ., Π.Σ., Π.Γ.: *Μαθηματικά Γ' Λυκείου* (Σχολικό εγχειρίδιο)
  - Μπάρλας Α. *Μαθηματικά Γ' Λυκείου* (Εκδ. Μπάρλας)
  - Παπαδάκης Β. *Μαθηματικά Γ' Λυκείου* (Εκδ. Σαββάλας)
- Πανεπιστημιακά συγγράμματα:
  - H.J., H.C., W.M.D.: *Thomas, Απειροστικός Λογισμός* (ΠΕΚ)
  - Spivak M.: *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός* (ΠΕΚ)
  - Terrence T.: *Analysis I* (Springer)
  - Ν.Σ., Γ.Σ., Γ.Ε.: *Απειροστικός λογισμός Ι* (Συμμετρία)
  - Ν.Σ., Γ.Σ., Γ.Ε.: *Απειροστικός λογισμός ΙΙα* (Συμμετρία)
  - Παπαδημητράκης Μ.: *Απειροστικός Λογισμός - Πραγματικές συναρτήσεις μίας μεταβλητής* (Παν. Κρήτης)
  - Γιαννόπουλος Α.: *Ανάλυση Ι και Εφαρμογές* (ΕΚΠΑ)

Περιεχόμενα I

Ορισμός (Σύνολα)

Ως σύνολο ορίζουμε κάθε συλλογή από αντικείμενα, των οποίων η σειρά και το πλήθος ίδιων όρων δεν μας ενδιαφέρει.[1] Συνήθως τα σύνολα τα συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα και τα στοιχεία τους με μικρά γράμματα.

Ορισμός (Ανήκει)

Εάν A είναι ένα σύνολο, θα γράφουμε $a \in A$ εάν το a είναι στοιχείο του A. Λέμε επίσης ότι το a ανήκει στο A.

Ένα παράδειγμα συνόλου είναι το $A = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Το σύνολο $\{1, 2\}$ είναι ίδιο με το $\{2, 1\}$, αφού -όπως είπαμε- η σειρά των όρων δεν μας ενδιαφέρει. Επειδή ούτε το πλήθος ίδιων όρων μας ενδιαφέρει, το $\{1, 2\}$ είναι ίδιο και με το $\{1, 1, 1, 2\}$.

Ορισμός (Υποσύνολο)

Εάν έχουμε δύο σύνολα A, B και το B περιέχει όλα τα στοιχεία του A (ενδεχομένως και μερικά ακόμα), θα λέμε ότι το A είναι υποσύνολο του B. Συμβολικά:

$$A \subseteq B$$

[1] Αυτός δεν είναι καλός ορισμός. Το σύνολο είναι έννοια που δεν μπορεί να οριστεί.

Εάν το B περιέχει όλα τα στοιχεία του A και σίγουρα έχει και μερικά παραπάνω, λέμε ότι το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B και συμβολίζουμε:

$$A \subset B$$

Ορισμός (Υπερσύνολο)

Μερικές φορές θέλουμε να σκεφτόμαστε, όχι ότι ένα σύνολο είναι μικρότερο από ένα άλλο, αλλά ότι αυτό το άλλο είναι μεγαλύτερο από το πρώτο. Η ιδέα δεν αλλάζει και η σχέση μεταξύ των συνόλων παραμένει ίδια, εμείς όμως (για λόγους οπτικούς ή γραφής), μπορεί να θέλουμε να γράφουμε:

$$B \supseteq A \text{ αντί για } A \subseteq B$$

και:

$$B \supset A \text{ αντί για } A \subset B$$

Το $B \supseteq A$ εκφράζει το υπερσύνολο (το B είναι υπερσύνολο του A) και το $B \supset A$ το γνήσιο υπερσύνλο (το B είναι γνήσιο υπερσύνολο του A).

Ορισμός (Ισότητα συνόλων)

Γενικά, ξεχνώντας επαναλήψεις στοιχείων και τη διαφορετική σειρά, λέμε ότι δύο σύνολα είναι ίσα εάν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

Παρατήρηση

Εάν ένα σύνολο είναι υποσύνολο ενός άλλου, μπορεί να είναι ίσα. Αν είναι γνήσιο υποσύνολο όμως, δεν μπορεί να είναι ίδια. Αντίστοιχα για τα υπερσύνολα.

Για παράδειγμα, το $A = \{0, 1\}$ είναι υποσύνολο του $B = \{0, 1\}$, αφού το B περιέχει όλα τα στοιχεία του A. Αντίστοιχα, το B είναι υποσύνολο του A. Το A δεν είναι γνήσιο υποσύνολο του B, αφού κάτι τέτοιο θα σήμαινε ότι το B έχει ένα στοιχείο που το A δεν έχει.

1. Ελέγξτε εάν τα παρακάτω σύνολα είναι υποσύνολα ή υπερσύνολα του $\{0, 1, 3, \triangle, \$\}$. Ποια είναι ίσα με το $\{0, 1, 3, \triangle, \$\}$;
   1.1 $\{0, 0, 0, 0, 1, 3, \triangle, \triangle, \$\}$
   1.2 $\{0, 1, 2, 3, \triangle, \triangle, \$\}$
   1.3 $\{\triangle, \$\}$
   1.4 $\{0, 1, 3, \triangle, \$\}$
   1.5 $\{0, 1, 3, \triangle, \$\}$
   1.6 $\{0, 2, 8, \Diamond\}$
   1.7 $\{3, 1, 3, \$, \triangle\}$
2. Κατασκευάστε ένα γνήσιο υποσύνολα κι ένα γνήσιο υπερσύνολο (αν υπάρχουν) για καθένα από τα παρακάτω:
   2.1 $\{-1, 0, \triangle, \$\}$
   2.2 $\{\triangle, \Diamond, \$\}$
   2.3 $\{\triangle\}$
   2.4 $\{\}$ (αυτό το σύνολο δεν έχει τίποτε μέσα. Ονομάζεται ≪κενό≫ και συμβολίζεται με $\emptyset$).
   2.5 $\{\Phi, O\}$
   2.6 $\{-1, 1, \Pi\}$
   2.7 $\{\{1\}\}$ (αυτό το σύνολο περιέχει μέσα του ένα σύνολο).

Ορισμός (Ένωση)

Για κάθε δύο σύνολα A, B μπορούμε να κατασκευάσουμε την ένωσή τους, που είναι ένα καινούριο σύνολο το οποίο περιέχει όλα τα στοιχεία των A, B. Το συμβολίζουμε $A \cup B$ και λέμε ότι είναι η ένωση των A και B.

Για παράδειγμα, εάν $A = \{a, a_*\}$ και $B = \{b, b_*\}$, τότε:

$$A \cup B = \{a, a_*, b, b_*\}$$

Ορισμός (Τομή)

Για κάθε δύο σύνολα A, B ορίζεται το σύνολο που περιέχει μόνο τα κοινά τους στοιχεία. Το συμβολίζουμε με $A \cap B$ και λέμε ότι είναι η τομή των A και B. Εάν τα A, B δεν έχουν κοινά στοιχεία, η τομή τους είναι το κενό σύνολο $\{\}$ (αλλιώς συμβολίζεται με $\emptyset$).

Για παράδειγμα, αν $A = \{a, x\}$ και $B = \{x, b\}$:

$$A \cap B = \{x\}$$

Ορισμός (Συνολοθεωρητική διαφορά)

Εάν A, B είναι δύο σύνολα, ορίζεται το σύνολο που περιέχει το A, από το οποίο έχουν αφαιρεθεί τα στοιχεία του B (εννοείται όσα απ' αυτά είναι στο A). Το συμβολίζουμε με $A \backslash B$ και το λέμε συνολοθεωρητική διαφορά.

Για παράδειγμα, εάν $A = \{a, a_*, b\}$ και $B = \{b, b_*\}$, τότε:

$$A \backslash B = \{a, a_*\}$$

(το b αφαιρέθηκε).

Παρατήρηση

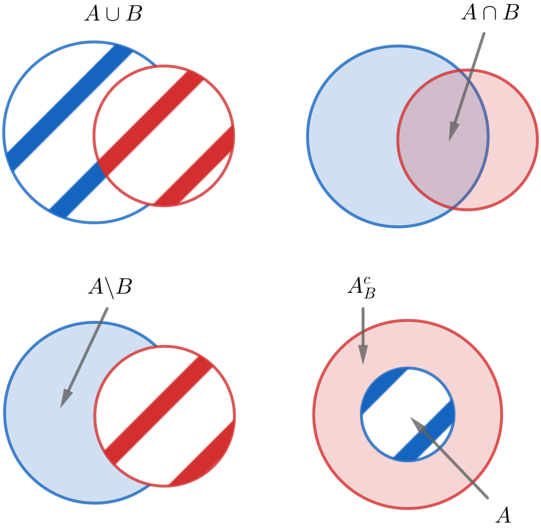
Το σύνολο $A \backslash B$ είναι ίδιο με το $A \backslash (A \cap B)$.

Ορισμός (Συμπληρώματα)

Έστω δύο σύνολα A, B με $A \subseteq B$. Το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του B που δεν είναι στο A το λέμε συμπλήρωμα του A στο B. Το συμβολίζουμε με A^c_B (ή με A^c, αν το B εννοείται).

Παρατήρηση

Τα σύνολα A^c_B και $B \backslash A$ είναι ίσα.


$A \cup B$
$A \cap B$
$A \setminus B$
A^c_B
A

Ως τώρα έχουμε δει τον τρόπο γραφής των συνόλων με αναγραφή των στοιχείων τους. Για παράδειγμα, έχουμε δει τη γραφή:

$$A = \{0, 1, 3, \triangle, \$\}$$

Αυτός είναι ένας καλός τρόπος κανείς να ορίσει ένα σύνολο, μόνο όμως όταν το σύνολο δεν έχει άπειρα στοιχεία ή είναι εμφανές ένα μοτίβο στα στοιχεία του. Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε το A όπως προηγουμένως ή το:

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \cdots\}$$

αλλά, εάν το σύνολο Γ είναι το σύνολο όλων των πολυγώνων, δεν είναι εύκολο να το γράψουμε. Γι' αυτό χρησιμοποιούμε τη γραφή του συνόλου με περιγραφή των στοιχείων του. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε το Γ ως εξής:

$$\Gamma = \{P \mid P \text{ είναι πολύγωνο}\}$$

Η γραφή σημαίνει το εξής: ≪Το Γ είναι το σύνολο των P, ούτως ώστε τα P είναι πολύγωνα≫. Η κάθετη γραμμή ξεχωρίζει την ονομασία των στοιχείων από την περιγραφή τους.

Ορισμός (Φυσικοί αριθμοί)

Κάθε αριθμός που εκφράζει ποσότητα από (ομοειδή) αντικείμενα ονομάζεται φυσικός αριθμός. Αν συμβολίσουμε με 1 τη μονάδα, προσθέτοντας μία μονάδα κάθε φορά, κατασκευάζουμε τους αριθμούς:

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \cdots$$

Το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι το:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 11, 12, 13, 14, \cdots\}$$

Ορισμός (Ακέραιοι αριθμοί)

Οι προσημασμένοι φυσικοί αριθμοί, μαζί με το 0, λέγονται ακέραιοι αριθμοί. Το σύνολο των ακεραίων αριθμών είναι το:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots\}$$

Ορισμός (Ρητοί αριθμοί)

Ρητοί είναι οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν ως λόγος ακεραίων (ακέραιος δια μη-μηδενικό ακέραιο). Το σύνολο των ρητών είναι το:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\kappa}{\lambda} \;\middle|\; \kappa, \lambda \in \mathbb{Z},\ \lambda \neq 0 \right\}$$

Οι ρητοί αριθμοί μπορούν να προσεγγίζουν πολύ καλά άλλους αριθμούς. Για παράδειγμα, έχουμε δει ότι:

$$\pi \approx 3.1415$$

Αυτό είναι στην ουσία μία προσέγγιση από ρητούς, αφού:

$$\pi \approx 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000}$$

Ορισμός (Πραγματικοί αριθμοί)

Πραγματικοί είναι όλοι οι αριθμοί που προσεγγίζονται από ρητούς. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι το:

$$\mathbb{R} = \{x \mid \text{ για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } q \in \mathbb{Q} \text{ ώστε } |x - q| < \varepsilon\}$$

(το ε δηλώνει πόσο καλή θέλουμε να κάνουμε την προσέγγιση. Το q είναι μία ρητή προσέγγιση $\varepsilon-$κοντά στο x).

Για το $\mathbb{R}$ (αλλά και για άλλα σύνολα), χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους βοηθητικούς συμβολισμούς:

- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ (οι πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι μηδέν).
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$ (οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί).
- $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$ (οι αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί).
- $\mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- $\mathbb{R}^*_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Χρησιμοποιώντας τα άπειρα ∞ και $-\infty$, τα οποία τα φανταζόμαστε ως οντότητες $\infty > x$, $-\infty < x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συμβολίζουμε:

- $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

Άλλοι χρήσιμοι συμβολισμοί είναι οι:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (το ανοικτό διάστημα άκρων a, b).
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ (το αριστερά ημιανοικτό διάστημα άκρων a, b).
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ (το δεξιά ημιανοικτό διάστημα άκρων a, b).
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ (το κλειστό διάστημα άκρων a, b).
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ (η ανοικτή ημιευθεία πάνω από το a).
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$ (η κλειστή ημιευθεία πάνω από το a).
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ (η ανοικτή ημιευθεία κάτω από το b).
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$ (η κλειστή ημιευθεία κάτω από το b).

Ορισμός (Μέγιστο κάτω και ελάχιστο άνω φράγμα)

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα μη-κενό σύνολο.

- Ως μέγιστο κάτω φράγμα του A ορίζεται ο μεγαλύτερος αριθμός $\mu \in \widetilde{\mathbb{R}}$ ώστε:
$$\text{Για κάθε } a \in A \text{ έχουμε } \mu \leqslant a$$
Συμβολίζουμε $\mu = \inf A$.
- Ως ελάχιστο άνω φράγμα του A ορίζεται ο μικρότερος αριθμός $M \in \widetilde{\mathbb{R}}$ ώστε:
$$\text{Για κάθε } a \in A \text{ έχουμε } a \leqslant M$$
Συμβολίζουμε $M = \sup A$.

Παράδειγμα

Για το σύνολο (a, b) (και αντίστοιχα για τα $(a, b], [a, b), [a, b]$) έχουμε $\inf(a, b) = a$ και $\sup(a, b) = b$. Για το σύνολο (a, ∞) (και αντίστοιχα για το $[a, \infty)$) έχουμε $\inf(a, \infty) = a$ και $\sup(a, \infty) = \infty$. Για το σύνολο $(-\infty, b)$ (και αντίστοιχα για το $(-\infty, b]$) έχουμε $\inf(-\infty, b) = -\infty$ και $\sup(a, \infty) = \infty$.

Ορισμός (Μέγιστο και ελάχιστο)

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα μη-κενό σύνολο.

- Εάν υπάρχει $a \in A$ ώστε $a = \inf A$, τότε λέμε ότι το a είναι το ελάχιστο στοιχείο του A. Συμβολίζουμε $a = \min A$.
- Εάν υπάρχει $b \in A$ ώστε $b = \sup A$, τότε λέμε ότι το b είναι το μέγιστο στοιχείο του A. Συμβολίζουμε $a = \max A$.

Παράδειγμα

- Εάν $A = [a, b]$, τότε $a = \min A$ και $b = \max A$. Εάν $A = (a, b]$, τότε $a = \inf A$ και δεν είναι ελάχιστο -παρόλα αυτά, $b = \max A$. Εάν $[a, b) \cup (c, d)$, τότε $a = \min A$ και $d = \sup A$.
- Τα σύνολα (a, b), (a, ∞), $(-\infty, b)$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ κ.ο.κ. δεν έχουν μέγιστα και ελάχιστα στοιχεία. Παρόλα αυτά, έχουν inf και sup (ακόμη κι αν αυτά μπορεί να είναι $\pm\infty$).

Οι πραγματικοί αριθμοί έχουν την ακόλουθη πολύ σημαντική ιδιότητα (η οποία κανονικά προκύπτει σχεδόν αξιωματικά, αλλά εμείς δεν το βλέπουμε).

Παρατήρηση (Αρχή της πληρότητας)

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα μη-κενό σύνολο.

- Εάν υπάρχει κάποιο $\mu^* \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $a \in A$ έχουμε $\mu^* \leqslant a$, τότε το $\inf A$ είναι πραγματικός αριθμός.
- Εάν υπάρχει κάποιο $M^* \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $a \in A$ έχουμε $a \leqslant M^*$, τότε το $\sup A$ είναι πραγματικός αριθμός.

Παρατήρηση

Ισχύει $\mu^* \leqslant \inf A$ και $\sup A \leqslant M^*$.

Παρατήρηση

Η αρχή της πληρότητας δεν ισχύει στους ρητούς. Τι εννοούμε: εάν το $A \subseteq \mathbb{Q}$ είναι μη κενό και υπάρχει μ^* ώστε για κάθε $a \in A$, $\mu^* \leqslant a$, τότε δεν ισχύει πάντα ότι $\inf A \in \mathbb{Q}$ (αντίστοιχα για το sup). Για παράδειγμα, το $\inf[(\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}] = \sqrt{2}$ είναι μέγιστο κάτω φράγμα, αλλά όχι ρητός!

Βοηθητικοί συμβολισμοί για αθροίσματα και γινόμενα είναι οι ακόλουθοι:

Ορισμός (Ο τελεστής $\sum$)

Εάν έχουμε ένα άθροισμα της μορφής:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n$$

μπορούμε να το συμπυκνώσουμε γράφοντας:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k$$

Ορισμός (Ο τελεστής $\prod$)

Εάν έχουμε ένα γινόμενο της μορφής:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \ \ldots \ \cdot x_n$$

μπορούμε να το συμπυκνώσουμε γράφοντας:

$$\prod_{k=1}^{n} x_k$$

1. Βρείτε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:
   1.1 $A = \{1, 2, 3\}, \ B = \{3, 4, 5\}$
   1.2 $A = \{\triangle, \circ, \$\}, \ B = \{0, 1, 2\}$
   1.3 $A = \mathbb{Q}, \ B = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
   1.4 $A = (0, 2), \ B = (1, 3]$
2. Βρείτε το σύνολο A_B^c στις ακόλουθες περιπτώσεις:
   2.1 $B = \{0, 1, 2\}, \ A = \{0, 2\}$
   2.2 $B = \mathbb{R}, \ A = \emptyset$
   2.3 $B = \mathbb{R}, \ A = (a, b)$
   2.4 $B = \mathbb{R}, \ A = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$
   2.5 $B = \{P \mid P \text{ πολύγωνο}\}, \ A = \{T \mid T \text{ ισοσκελές τρίγωνο}\}$
3. Αποδείξτε ότι το σύνολο:

$$(1, \infty) \cap (2, \infty) \cap (3, \infty) \cap (4, \infty) \cap \cdots$$

είναι το κενό $\emptyset$.

Τα μαθηματικά της Γ' λυκείου όπως και ο απειροστικός λογισμός I (που διδάσκεται τα πρώτα εξάμηνα σε πολλές σχολές) έχει ως κύριο αντικείμενο μελέτης τις πραγματικές συναρτήσεις και τις ιδιότητές τους.

Ορισμός (Συναρτήσεις)

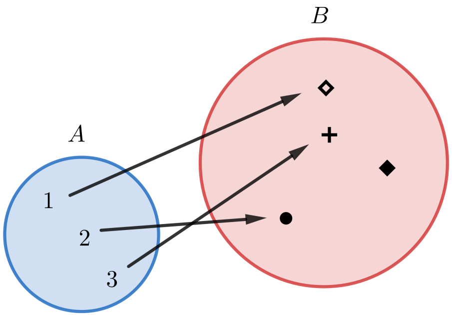
Ας θεωρήσουμε A και B δύο σύνολα. Μία συνάρτηση (ας τη συμβολίσουμε f) είναι μία διαδικασία η οποία αντιστοιχεί κάθε $a \in A$ σε μία και μοναδική τιμή b_a εντός του B (το b_a εξαρτάται από το a, γι' αυτό έχει δείκτη a). Το b_a το συμβολίζουμε και με $f(a)$. Οι συναρτήσεις λέγονται και ≪απεικονίσεις≫, ιδίως όταν έχουν έντονα γεωμετρικά χαρακτηριστικά (λ.χ. οι ≪γραμμικές απεικονίσεις≫).

Ορισμός (Πεδία ορισμού και τιμών)

Έστω $f : A \to B$ μία συνάρτηση.

- Το σύνολο A λέγεται ≪πεδίο ορισμού≫ της f.
- Το σύνολο B λέγεται ≪πεδίο τιμών≫ της f.

Παρακάτω θα δούμε μερικά παραδείγματα συναρτήσεων.



Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζεται μία αντιστοιχία από το σύνολο:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

στο σύνολο:

$$B = \{\lozenge, +, \bullet, \blacklozenge\}$$

Το 1 αντιστοιχεί στο $\lozenge$, το 2 στο $\bullet$ και το 3 στο $+$. Οι συναρτήσεις μπορεί να είναι περίπλοκες και όχι κατ' ανάγκη από αριθμούς σε αριθμούς.

Ας ονοματήσουμε αυτήν την συνάρτηση f. Το A είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και B το πεδίο τιμών. Προσέξτε ότι το B περιέχει ένα στοιχείο που δεν ≪πιάνεται≫ από ένα στοιχείο του A μέσω της f. Αυτό δεν είναι πρόβλημα.

Ορισμός (Σύνολο τιμών)

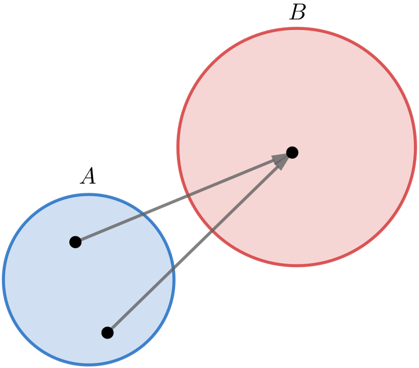
Εάν $f : A \to B$ είναι μία συνάρτηση, το σύνολο των σημείων του B που η συνάρτηση f ≪πιάνει≫, λέγεται σύνολο τιμών. Συμβολίζεται με $f(A)$, και αυστηρά ορίζεται ως εξής:

$$f(A) = \{b \in B \mid \text{υπάρχει } a \in A \text{ με } f(a) = b\}$$

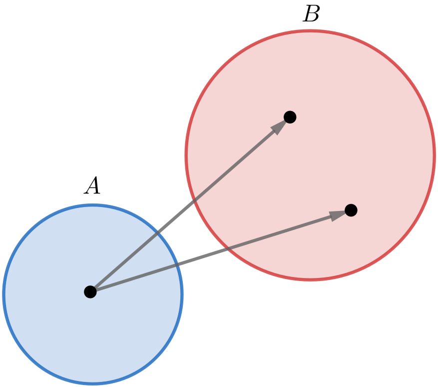
Παρατήρηση

Εάν $f : A \to B$ είναι μία συνάρτηση, τότε $f(A) \subseteq B$.

Επιτρέπεται επίσης μία συνάρτηση να αντιστοιχεί δύο στοιχεία στο πεδίο ορισμού στο ίδιο στοιχείο του πεδίου τιμών.



Αυτό που δεν επιτρέπεται είναι μία τιμή του πεδίου ορισμού να αντιστοιχίζεται σε δύο τιμές του συνόλου τιμών



Εφόσον τη συνάρτηση τη βλέπουμε ως διαδικασία, θέλουμε να έχει ένα αποτέλεσμα κι όχι πολλά. Από την άλλη, αν ξεκινήσουμε από δύο διαφορετικές καταστάσεις, μπορεί και να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Ορισμός (Σύνθεση)

Στις συναρτήσεις ορίζεται η πράξη της σύνθεσης, η οποία συμβολίζεται με $\circ$. Εάν $f : A_f \to A_g$ και $g : A_g \to B$ είναι δύο συναρτήσεις, ορίζεται η:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

Διαγραμματικά:

$$\begin{tikzcd} A_f \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & A_g \arrow[d, "g"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Η σύνθεση ορίζεται και σε μία γενικότερη περίπτωση, όπου το σύνολο τιμών $f(A_f)$ είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της g.

Παράδειγμα

- Εάν $f(x) = 3x - 2$ και $g(x) = e^x$, η σύνθεση $g \circ f$ γίνεται e^{3x-2}.
- Εάν $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \log x$, η σύνθεση $g \circ f$ γίνεται $\log \sqrt{x}$.
- Προσέχουμε σε περιπτώσεις τις οποίες το σύνολο τιμών της f δεν είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της g. Για παράδειγμα, αν $f = x^2$ και $g(x) = 1/x$, τότε $A_f = \mathbb{R}$, $A_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ και:

  $$f(A_f) = [0, \infty), \text{ που δεν είναι υποσύνολο του } A_g$$

  Η σύνθεση δεν ορίζεται από το A_f στο $f(A_f)$ κι έπειτα στο B, αλλά από το $A_f\backslash\{0\}$ στο $f(A_f\backslash\{0\})$ κι έπειτα στο B. Εν ολίγοις, λέμε ότι η:

  $$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2}$$

  ορίζεται όταν $x \neq 0$.
- Εάν $f(x) = \log x$ και $g(x) = 1/\sqrt{x}$, τότε $A_f = \mathbb{R}_+^*$, $A_g = \mathbb{R}_+^*$ και η σύνθεση:

  $$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{\log x}}$$

  ορίζεται όταν $x > 1$, δηλαδή στο σύνολο $(1, \infty)$.

Εμείς γενικά θα ασχοληθούμε με πραγματικές συναρτήσεις, δηλαδή με συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$.

Παράδειγμα

- Τα πολυώνυμα $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που για κάθε x παίρνουν τη μορφή:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \; a_k \in \mathbb{R}$$

  είναι πραγματικές συναρτήσεις. Παράδειγμα πολυωνύμου:

$$p(x) = 2x^{54} - 5x^4 - 8x + 2$$

- Οι ρητές συναρτήσεις $q : \mathbb{R} \setminus \{\text{πεπερασμένο πλήθος αριθμών}\} \to \mathbb{R}$ που αποτελούν κλάσμα πολυωνύμων (μη-μηδενικού παρονομαστή):

$$q(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{n} b_k x^k}$$

  (όπου $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ και κάποιο b_k δεν είναι μηδέν) είναι πραγματικές συναρτήσεις. Παράδειγμα ρητής συνάρτησης:

$$q(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\eta\mu, \sigma\upsilon\nu, \epsilon\varphi$ είναι πραγματικές συναρτήσεις. Ειδικότερα:

$$\begin{aligned}
\eta\mu &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
\sigma\upsilon\nu &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
\epsilon\varphi = \frac{\eta\mu}{\sigma\upsilon\nu} &: \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}
\end{aligned}$$

- Η συνάρτηση του Dirichlet $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Η εκθετική συνάρτηση $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Ο δεκαδικός λογάριθμος $\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ (δηλαδή ο $\log_{10}$).
- Ο φυσικός λογάριθμος $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ (δηλαδή $\log_e$).
- Οι ρίζες $\sqrt{x} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ (όχι κατ' ανάγκη τετραγωνικές).
- Πολλές ακόμη συναρτήσεις...

Παρατήρηση

Όταν μας δίνεται μία συνάρτηση μέσω του τύπου της, για παράδειγμα η:

$$q(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

και μας ζητείται το πεδίο ορισμού της, εμείς θα ψάχνουμε το μεγαλύτερο σύνολο στο οποίο η συνάρτηση έχει νόημα. Συγκεκριμένα για την q, δεν είναι δυνατόν να την ορίσουμε στο 0 (παντού αλλού δεν υπάρχει πρόβλημα), οπότε το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο:

$$A_q = \mathbb{R} \backslash \{0\} = \mathbb{R}^*$$

Αντίστοιχα, η:

$$r(x) = \frac{1}{x^2+2x+1}$$

δεν ορίζεται όταν ο παρονομαστής είναι μηδέν, δηλαδή όταν $x = -1$. Οπότε το πεδίο ορισμού της είναι το $A_r = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$.

Άλλα προβλήματα που μπορεί να συναντήσουμε είναι στις ρίζες, στις οποίες η υπόριζη ποσότητα πρέπει να είνα μη-αρνητική. Εάν θεωρήσουμε τη συνάρτηση:

$$s(x) = \sqrt{x-4}$$

πρέπει $x - 4 \geqslant 0$, δηλαδή $x \geqslant 4$. Το πεδίο ορισμού της s γίνεται:

$$A_s = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 4\} = [4, \infty)$$

Θυμηθείτε ότι η ρίζα ενός αριθμού $\sqrt{a}$ αποτελεί τη θετική λύση της $x^2 = a$, επομένως (για να έχει νόημα ο συμβολισμός) πρέπει $a \geqslant 0$ (δηλαδή η υπόριζη ποσότητα να είναι μη-αρνητική). Στους λογαρίθμους, πρέπει το όρισμά τους να είναι θετικό. Θυμηθείτε πάλι ότι η ποσότητα $\log a$ είναι ο αριθμός αυτός για τον οποίο:

$$10^{\log a} = a$$

οπότε (για να έχει νόημα ο συμβολισμός) πρέπει $a > 0$.

1. Ελέγξτε εάν τα παρακάτω αντικείμενα είναι συναρτήσεις:
   1.1 Το f_1 ώστε $f_1(\$) = 0,\ f_1(\%) = 2,\ f_1(\&) = 3.$
   1.2 Το f_2 ώστε $f_2(0) = \triangle,\ f_2(0) = \Diamond,\ f_2(1) = \Box$
   1.3 Το f_3 ώστε $f_3(0) = 0,\ f_3(1) = 0,\ f_4(2) = 1$
   1.4 Το f_4 για το οποίο:
   $$f_4(x) = \frac{x^2 + x + 1}{8 - 2x^2}$$
   σε κατάλληλο σύνολο A_4.
   1.5 Το f_5 για το οποίο:
   $$f_5(x) = \frac{x}{\log x}$$
   σε κατάλληλο σύνολο A_5.
   1.6 Το f_6 για το οποίο:
   $$f_6(x) = \sqrt{f_4(x) \cdot f_5(x)}$$
   σε κατάλληλο σύνολο A_6.
   1.7 Το f_7 για το οποίο:
   $$f_7(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{όταν } x \in (0, 1] \\ 2x, & \text{όταν } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

Έπειτα, βρείτε τα πεδία ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων.

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $g \circ f$ και τον τύπο της, όταν:
   2.1 $f(x) = x^3$ και $g(x) = \sqrt{x}$, με πεδία ορισμού $A_f = \mathbb{R}$ και $A_g = \mathbb{R}_+$.
   2.2 $f(x) = \log x$ και $g(x) = 1/\sqrt{x}$, με πεδία ορισμού $A_f = \mathbb{R}^*_+$ και $A_g = \mathbb{R}^*_+$.
   2.3 $f(x) = -x^2$ και $g(x) = \sqrt{x}$, με πεδία ορισμού $A_f = \mathbb{R}$ και $A_g = \mathbb{R}_+$.
   2.4 $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \log x$, με πεδία ορισμού $A_f = \mathbb{R}_+$ και $A_g = \mathbb{R}^*_+$.
   2.5 $f(x) = \text{ημ}(x)$ και $g(x) = 1/x$, με πεδία ορισμού $A_f = \mathbb{R}$ και $A_g = \mathbb{R}^*$.
3. Είναι οι παρακάτω προτάσεις ψευθείς (Ψ) ή αληθείς (Α);
   3.1 (Ψ,Α) Για κάθε δύο συναρτήσεις f, g έχουμε $f \circ g = g \circ f$.
   3.2 (Ψ,Α) Για κάθε δύο συναρτήσεις f, g οι $f \circ g$, $g \circ f$ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.
   3.3 (Ψ,Α) Υπάρχουν συναρτήσεις f, g ώστε η $f \circ g$ να ορίζεται μόνο στο κενό σύνολο.
   3.4 (Ψ,Α) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ έχει πεδίο ορισμού $A_f = [0, 1]$.
   3.5 (Ψ,Α) Η συνάρτηση $f(x) = \log |x|$ έχει πεδίο ορισμού $A_f = \mathbb{R}$
   3.6 (Ψ,Α) Εάν $f(x) = x$, για οποιαδήποτε πραγματική συνάρτηση $g : A_g \to B$ οι $f \circ g$ και $g \circ f$ ισούνται. Δηλαδή, έχουν τον ίδιο τύπο και το ίδιο πεδίο ορισμού.

Μία πολύ βασική έννοια -με την οποία θα ασχοληθούμε περισσότερο αργότερα- είναι αυτή της γραφικής παράστασης.

Ορισμός (Καρτεσιανό επίπεδο)

Ως καρτεσιανό επίπεδο ορίζουμε το επίπεδο με συντεταγμένες πραγματικούς αριθμούς. Οι συντεταγμένες υλοποιούνται με δύο κάθετους άξονες, τους οποίους ονομάζουμε «άξονα των x» και «άξονα των y». Συγκεκριμένα, κάθε σημείο έχει συντεταγμένες (x, y), όπου $x, y \in \mathbb{R}$, κι έτσι το καρτεσιανό επίπεδο παίρνει τη μορφή:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Έχοντας βάλει συντεταγμένες στο επίπεδο, μπορούμε να περιγράψουμε περίπλοκα σχήματα μέσω των συντεταγμένων των σημείων τους. Για παράδειγμα, στη Β' λυκείου έχουμε δει ότι τα σύνολα της μορφής:

$$\{(x, y) \mid y = ax + b\}, \ \{(x, y) \mid x = a\}$$

περιγράφουν ευθείες.

Ορισμός (Γραφική παράσταση - το σχήμα της συνάρτησης)

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ μία πραγματική συνάρτηση. Το σύνολο:

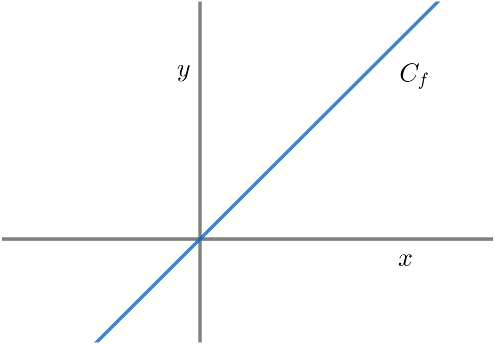
$$C_f = \{(x, y) \mid x \in A \text{ και } y = f(x)\}$$

ονομάζεται το γράφημα της f, ή η γραφική παράσταση της f.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε $f(x) = x$ και το γράφημά της:

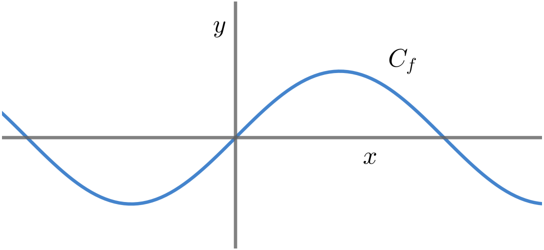
$$C_f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y = x\}$$

Αν σχεδιάσουμε στο επίπεδο όλα τα σημεία του C_f στο καρτεσιανό επίπεδο, παίρνουμε το ακόλουθο σχήμα:

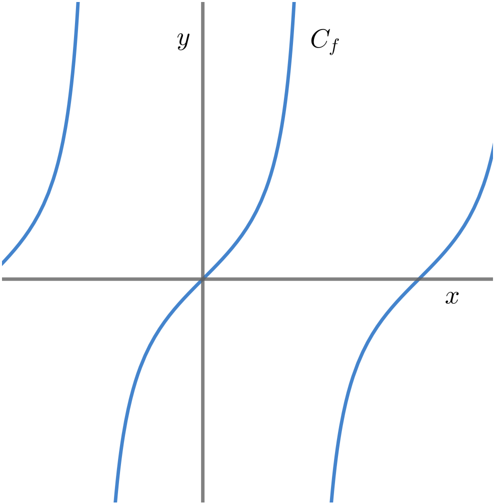


Τα μπλε σημεία του C_f φτιάχνουν μία ευθεία, όπως ίσως περιμέναμε.

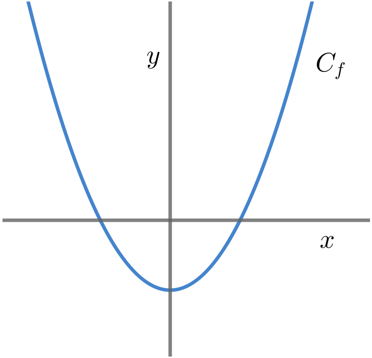
Άλλα παραδείγματα γραφικών παραστάσεων θα δούμε ευθύς αμέσως. Εάν $f(x) = \eta\mu(x)$:



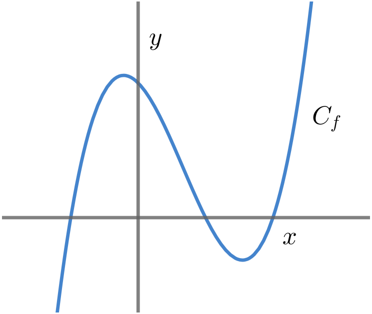
Εάν $f(x) = \text{εφ}(x)$:



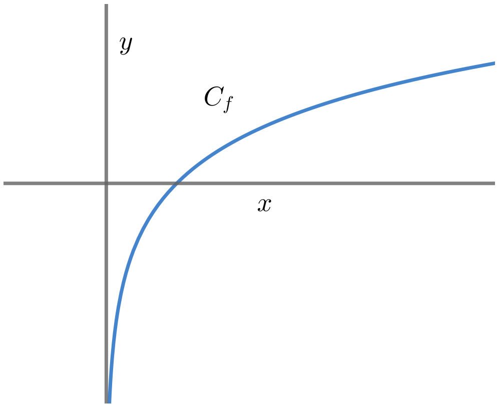
Εάν $f(x) = x^2 - 1$:



Εάν $f(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$:

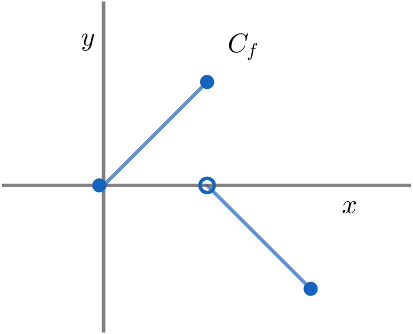


Εάν $f(x) = \log x$:



Εάν:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{όταν } x \in [0,1] \\ 1-x, & \text{όταν } x \in (1,2] \end{cases}$$



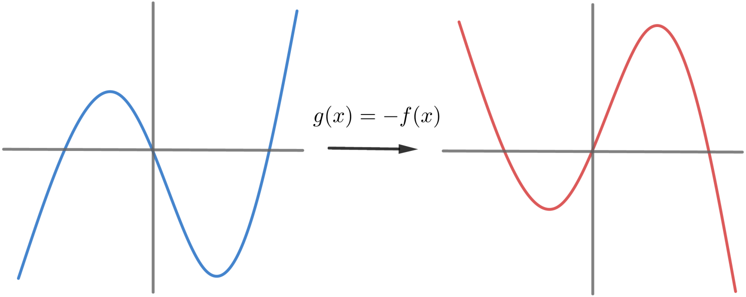
Βάζουμε • για να δηλώσουμε ότι το ≪ακραίο≫ σημείο ανήκει σε αυτόν τον κλάδο Βάζουμε ∘ όταν το ≪ακραίο≫ σημείο δεν ανήκει σε αυτόν τον κλάδο. Στο παραπάνω παράδειγμα, το $\left(1, f(1)\right) = (1,1)$ ανήκει στον αριστερό κλάδο. Το σημείο $(1,0)$ δεν ανήκει στο C_f.

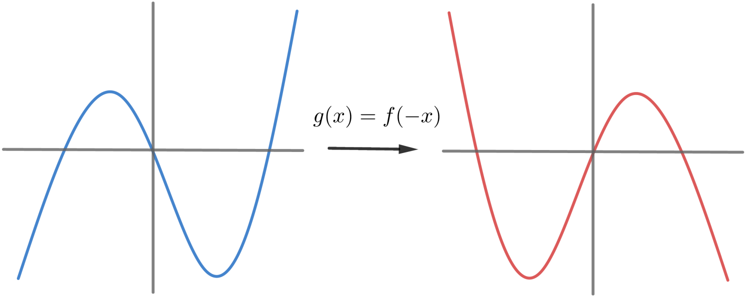
Παρατήρηση

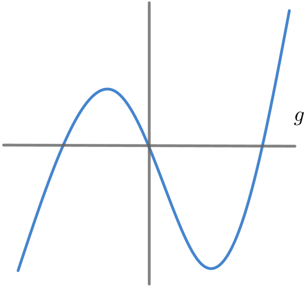
Έστω μία πραγματική συνάρτηση f.

- Εάν $g(x) = -f(x)$, το γράφημα C_g είναι ανάκλαση του C_f, ως προς τον άξονα των x.
- Εάν η f ορίζεται στο διάστημα (a, b), τότε η $g(x) = f(-x)$ ορίζεται στο $(-b, -a)$ και έχει γράφημα C_g που είναι ανάκλαση του C_f ως προς τον άξονα των y.
- Εάν η f ορίζεται στο διάστημα (a, b), τότε η $g(x) = f(x + c)$ ορίζεται στο $(a - c, b - c)$ και έχει γράφημα C_g που είναι μεταφορά του C_f κατά $-c$ στον άξονα των x.
- Εάν $g(x) = f(x) + c$, το γράφημα C_g είναι μεταφορά του C_f κατά c στον άξονα των y.
- Εάν $g(x) = \lambda f(x)$ με $\lambda > 0$, το γράφημα C_g είναι μεγέθυνση επί λ στον άξονα των y.
- Εάν η f ορίζεται στο διάστημα (a, b), τότε η $g(x) = f(x/\lambda)$, $\lambda > 0$, ορίζεται στο $(\lambda a, \lambda b)$ και έχει γράφημα C_g που είναι μεγέθυνση του C_f επί λ στον άξονα των x. Για την ακρίβεια, για $\lambda > 1$ είναι μεγέθυνση και για $0 < \lambda < 1$ είναι σμύκρυνση, αλλά θα γράφουμε μόνο ≪μεγέθυνση≫, για συντομία.[2]

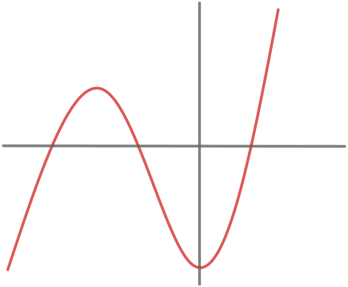
[2] Ο ορθός όρος είναι ≪συστολοδιαστολή≫, αλλά δεν θα τον χρησιμοποιήσουμε, για να μην μπερδέψει.

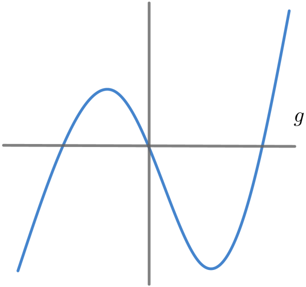

$g(x) = -f(x)$


$g(x) = f(-x)$

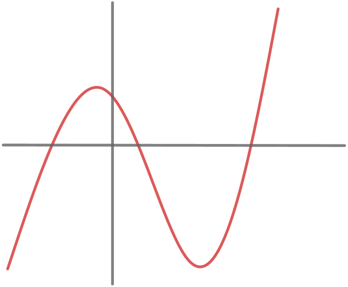


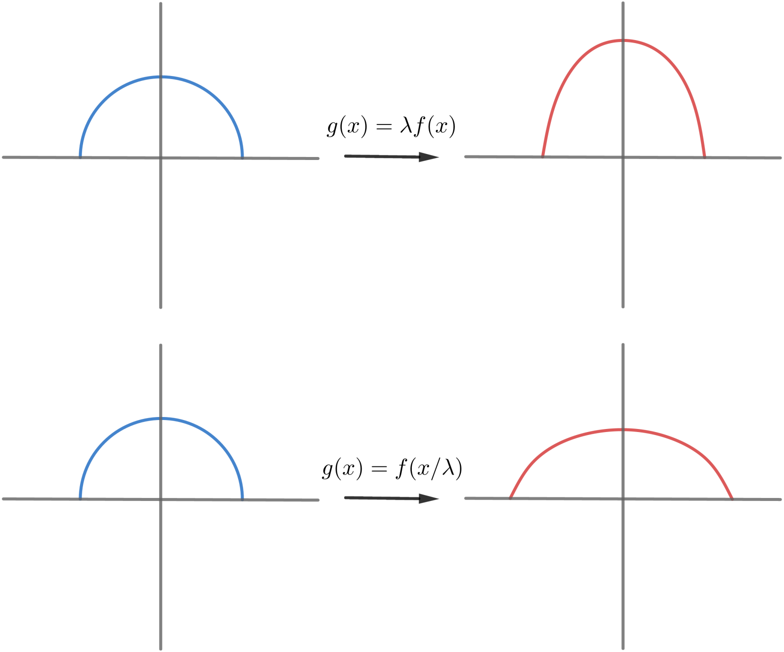
$$\xrightarrow[(c > 0)]{g(x) = f(x+c)}$$





$$\xrightarrow[(c < 0)]{g(x) = f(x+c)}$$




$g(x) = \lambda f(x)$
$g(x) = f(x/\lambda)$

1. Δεδομένου ότι γνωρίζετε το σχήμα της συνάρτησης (το είδαμε πριν):

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ όταν } x \in [0,1] \\ 1-x, \text{ όταν } x \in (1,2] \end{cases}$$

   1.1 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των $g_1(x) = -f(x)$, $g_2(x) = f(-x)$, $g_3(x) = 2f(x)$, $g_4(x) = f(x/2)$, $g_5(x) = f(1-x)$, $g_6(x) = -2f(x)$.
   1.2 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$.

2. Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \widetilde{\mathbb{R}}$, μία πραγματική συνάρτηση.
   2.1 Τι σχέση έχουν οι γραφικές παραστάσεις των f και $g(x) = -\lambda f(x)$, $\lambda > 0$;
   2.2 Τι σχέση έχουν οι γραφικές παραστάσεις των f και $g(x) = f(c-x)$, $c \in \mathbb{R}$;
   2.3 Τι σχέση έχουν οι γραφικές παραστάσεις των f και $g(x) = f(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
   2.4 Τι σχέση έχουν οι γραφικές παραστάσεις των f και $g(x) = \mu f(cx+h)$, $\mu, c, h \in \mathbb{R}$;

Μία σημαντική κλάση συναρτήσεων είναι οι μονότονες συναρτήσεις.

Ορισμός (Μονότονες συναρτήσεις)

Έστω f μία πραγματική συνάρτηση.

- Η f θα λέγεται αύξουσα εάν για κάθε $x < z$ έχουμε $f(x) \leqslant f(z)$.
- Η f θα λέγεται φθίνουσα εάν για κάθε $x < z$ έχουμε $f(x) \geqslant f(z)$.
- Η f θα λέγεται γνησίως αύξουσα εάν για κάθε $x < z$ έχουμε $f(x) < f(z)$.
- Η f θα λέγεται γνησίως φθίνουσα εάν για κάθε $x < z$ έχουμε $f(x) > f(z)$.

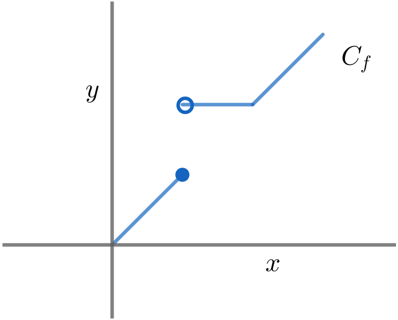
Οι μονότονες συναρτήσεις θα εμφανιστούν σε αρκετά σημεία στη συνέχεια.

Παρατήρηση

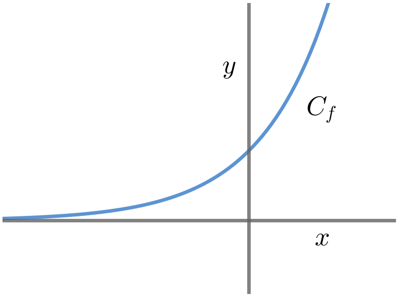
Εάν μία συνάρτηση είναι αύξουσα, το γράφημά της φαίνεται να ≪ανεβαίνει≫. Εάν είναι φθίνουσα, φαίνεται να ≪κατεβαίνει≫. Και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις είναι δυνατόν να υπάρχει και μία οριζόντια ευθεία στο γράφημα, πράγμα που δεν επιτρέπεται στα γραφήματα στις γνησίως αύξουσες / φθίνουσες συναρτήσεις.

Ένα παράδειγμα αύξουσας συνάρτησης είναι η:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{όταν } x \in [0,1] \\ 2, & \text{όταν } x \in (1,2) \\ x, & \text{όταν } x \in [2,3] \end{cases}$$

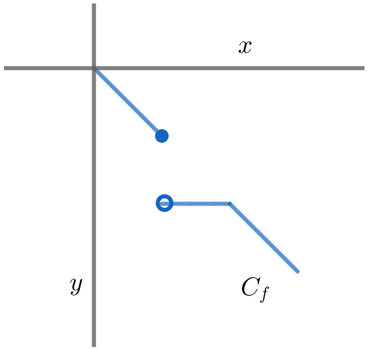


Ένα παράδειγμα γνησίως αύξουσας συνάρτησης είναι η $f(x) = e^x$.

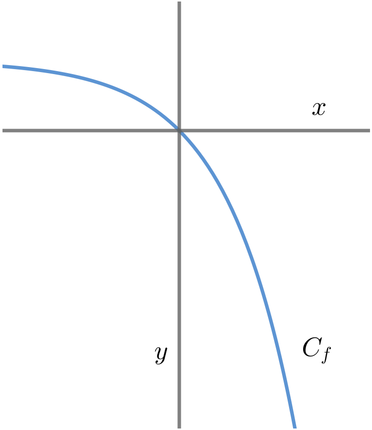


Ένα παράδειγμα φθίνουσας συνάρτησης είναι η:

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{ όταν } x \in [0,1] \\ -2, \text{ όταν } x \in (1,2) \\ -x, \text{ όταν } x \in [2,3] \end{cases}$$



Ένα παράδειγμα γνησίως φθίνουσας συνάρτησης είναι η $f(x) = 1 - e^x$



Παρατήρηση

- Οι διάφορες μεταφορές $f(x+c)$, $f(x)-c$ δεν αλλάζουν τη μονοτονία της f.
- Οι ανακλάσεις $f(-x)$, $-f(x)$ αλλάζουν τη μονοτονία της f.
- Οι μεγεθύνσεις $f(x/\lambda)$, $\lambda f(x)$ με $\lambda > 0$ δεν αλλάζουν τη μονοτονία της f. Όμως, εάν $\lambda < 0$, τότε η μονοτονία αλλάζει.

Πρόταση

Έστω f, g δύο πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες σε κοινό σύνολο A, με το ίδιο είδος μονοτονίας.

i. Η $h(x) = f(x) + g(x)$ έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με τις f, g.
ii. Εάν επιπλέον οι f, g είναι θετικές, τότε η $s(x) = f(x) \cdot g(x)$ έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με τις f, g.

Απόδειξη: Ασχολούμαστε μόνο με την περίπτωση των γνησίων αύξοντων συναρτήσεων, καθώς οι άλλες είναι παρόμοιες.
Για το i. Για κάθε $x < z$ έχουμε $f(x) < f(z)$ και $g(x) < g(z)$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη:

$$x < z \Rightarrow f(x) + g(x) < f(z) + g(z), \text{ δηλαδή } h(x) < h(z)$$

Για το ii. Για κάθε $x < z$ έχουμε $0 \leqslant f(x) < f(z)$ και $0 \leqslant g(x) < g(z)$, οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη, λόγω των θετικών ποσοτήτων οι ανισότητες διατηρούνται και έχουμε:

$$x < z \Rightarrow f(x) \cdot g(x) < f(z) \cdot g(z), \text{ δηλαδή } s(x) < s(z)$$

$\square$

Η προηγούμενη παρατήρηση σε συνδυασμό με την προηγούμενη πρόταση μπορούν να μας βοηθήσουν να βρίσκουμε τη μονοτονία μίας συνάρτησης -σε κάποιες περιπτώσεις- μελετώντας απλούστερες συναρτήσεις. Για παράδειγμα, η:

$$f(x) = 1 - x^3 e^x, \ x \geqslant 0$$

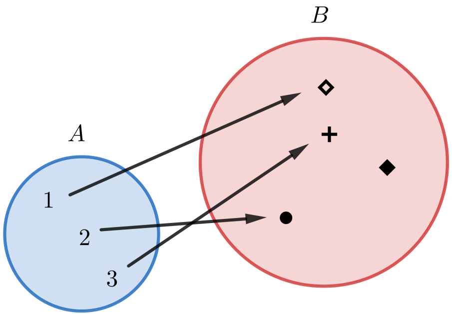
είναι γνησίως φθίνουσα, αφού οι e^x, x^3 είναι θετικές και γνησίως αύξουσες όταν $x \geqslant 0$, η $x^3 e^x$ είναι γνησίως αύξουσα, η $-x^3 e^x$ είναι γνησίως φθίνουσα, και η $1 - x^3 e^x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Προηγουμένως ορίσαμε την έννοια της συνάρτησης και είπαμε ότι ≪είναι μία διαδικασία που στέλνει κάθε στοιχείου του πεδίου ορισμού σε μοναδικό στοιχείο του πεδίου τιμών≫. Είναι δυνατόν να κάνουμε την αντίστροφη διαδικασία; Είναι δηλαδή δυνατόν να αντιστοιχίσουμε σε κάθε τιμή του πεδίου τιμών την τιμή του πεδίου ορισμούν από την οποία αυτή προήλθε, και να πάρουμε μία άλλη συνάρτηση; Τις περισσότερες φορές, η απάντηση είναι όχι.

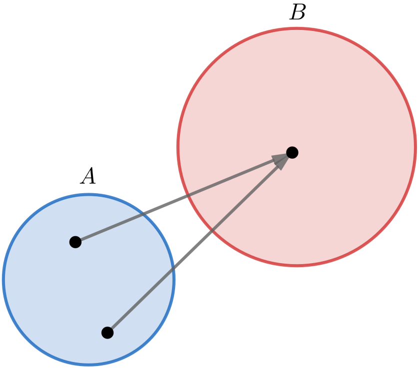
Παρατήρηση (Τα προβλήματα στην αντιστροφή)

- Κατ' αρχάς, έχουμε δει ότι μία συνάρτηση δεν ≪πιάνει≫ κατ' ανάγκη όλα τα στοιχεία του πεδίου τιμών, οπότε δεν έχουν προέλθει όλα τα στοιχεία του πεδίου τιμών από στοιχεία του πεδίου ορισμού.
- Ενδέχεται να φτάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με δύο διαφορετικούς τρόπους. Ενδέχεται δηλαδή ένα στοιχείο του πεδίου τιμών να ≪πιάνεται≫ από δύο ή και παραπάνω στοιχεία του πεδίου τιμών. Αν πάμε αντίστροφα, η τιμή του πεδίου τιμών σε ποια τιμή του πεδίου ορισμού θα πάει;

Ερώτημα: το ♦ σε ποιο στοιχείο θα αντιστραφεί; Να το πρώτο πρόβλημα!



Ερώτημα: η κουκίδα του πεδίου τιμών, σε ποια από τις δύο κουκίδες του πεδίου ορισμού θα αντιστραφεί; Να το δεύτερο πρόβλημα!



Για να λυθούν αυτά τα προβλήματα:

- Περιοριζόμαστε στο σύνολο τιμών $f(A)$, που είναι μικρότερο από το B.
- Περιοριζόμαστε σε συναρτήσεις στις οποίες κάθε στοιχείο του συνόλου τιμών πιάνεται ακριβώς μία φορά κι όχι παραπάνω.

Ορισμός ($1-1$ συναρτήσεις)

Μία συνάρτηση $f : A \to B$ θα λέγεται $1-1$ (ένα προς ένα) εάν κάθε $b \in f(A)$ «πιάνεται» ακριβώς μία φορά από το A. Δηλαδή, εάν $f(x) = b = f(z)$, τότε $x = z$.

Παρατήρηση

Με διαφορετική διατύπωση, η f είναι $1-1$ εάν για $x \neq z$ έχουμε $f(x) \neq f(z)$.

Έχοντας κάνει αυτήν την προετοιμασία, μπορούμε να μιλήσουμε για αντίστροφες συναρτήσεις.

Ορισμός (Αντίστροφες συναρτήσεις)

Έστω $f : A \to B$ μία $1-1$ συνάρτηση. Ορίζουμε την αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : f(A) \to A$ ως εξής: για κάθε $b \in f(A)$, θέτουμε $f^{-1}(b)$ τη μοναδική τιμή $a \in A$ ούτως ώστε $f(a) = b$. Στην ουσία, σε περιπτώσεις που αυτό είναι δυνατό, γυρνάμε τα βέλη ≪ανάποδα≫.

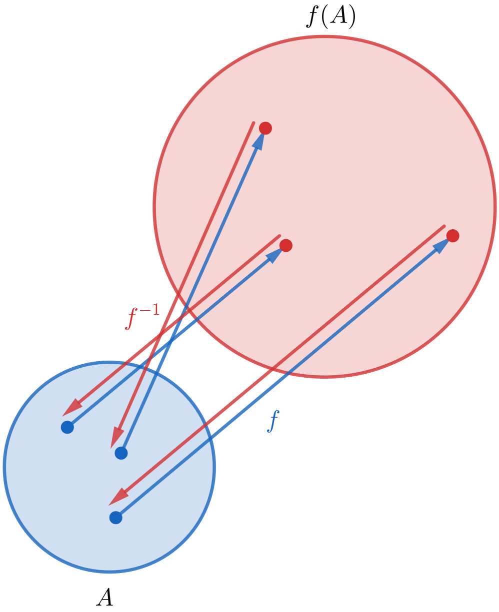
Πρόταση

Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι $1-1$, οπότε έχει αντίστροφο. Επιπλέον, η αντίστροφός της διατηρεί την ίδια μονοτονία.

Απόδειξη: Θα το δείξουμε μόνο στην περίπτωση της γνησίως αύξουσας συνάρτησης (καθώς η άλλη περίπτωση είναι παρόμοια). Αν θεωρήσουμε $x \neq z$, τότε $x < z$ ή $x > z$. Δηλαδή, $f(x) < f(z)$ ή $f(x) > f(z)$. Σε κάθε περίπτωση, $f(x) \neq f(z)$.
Όσον αφορά τη μονοτονία, αν θεωρήσουμε $y, w \in f(A)$ με $y = f(x)$, $w = f(z)$ και $y < w$, τότε $f(x) < f(z)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, δεν επιτρέπεται $x > z$ ή $x = z$ (αφού τότε $f(x) > f(z)$ ή $f(x) = f(z)$). Κατ' ανάγκη, $x < z$. Δηλαδή $f^{-1}(y) = x < z = f^{-1}(w)$. Έτσι λοιπόν:

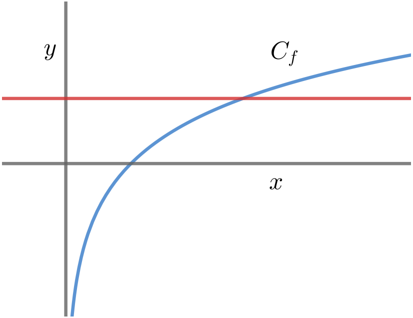
$$y < w \Rightarrow f^{-1}(y) < f^{-1}(w)$$

□

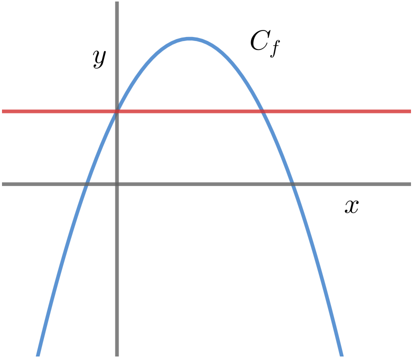


$f(A)$
f^{-1}
f
A

Όσον αφορά τα γραφήματα των $1-1$ συναρτήσεων, αυτά έχουν την εξής μορφή: Εφόσον η συνάρτηση δεν ≪περνάει≫ δύο φορές από την ίδια τιμή του πεδίου τιμών, το γράφημα της συνάρτησης είναι τέτοιο ώστε να μην τέμνει δύο φορές καμία οριζόντια ευθεία.



Παράδειγμα μίας συνάρτησης που δεν είναι $1-1$, είναι το ακόλουθο.



Παρατήρηση

Έστω μία $1-1$ συνάρτηση $f : A \to B$. Για να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : f(A) \to A$, χρειάζεται να γράψουμε το x συναρτήσει του $f(x)$. Δηλαδή, εάν:

$$y = f(x)$$

πρέπει να κάνουμε «πράξεις» και να γράψουμε:

$$x = g(y) \text{ [δηλαδή } x = g\big(f(x)\big)\text{]}$$

Η συνάρτηση g που θα βρούμε είναι η ζητούμενη αντίστροφη f^{-1}.

Παρατήρηση

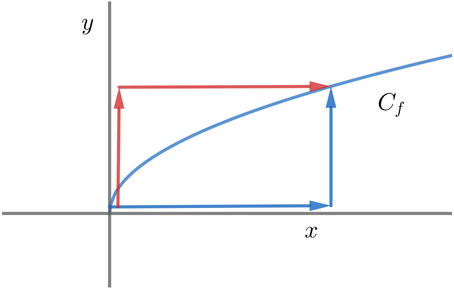
Αφού η αντίστροφη συνάρτηση «γυρνάει πίσω τα βέλη», θα πρέπει να ισχύουν:

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \text{ και } f\big(f^{-1}(y)\big) = y$$

Παράδειγμα

- Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$. Για να βρούμε την αντίστροφη, γράφουμε $y = \sqrt{x}$ και έχουμε $y^2 = x$. Δηλαδή, αφού πρέπει $x = f^{-1}(y)$, έχουμε $f^{-1}(y) = y^2$.
  Προσοχή: Το παραπάνω μας δίνει τον τύπο της αντίστροφης αλλά όχι το πεδίο ορισμού. Για να το βρούμε, παρατηρούμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι $f\big([0,\infty)\big) = [0,\infty)$, οπότε το πεδίο ορισμού της f^{-1} (δηλαδή τα $\ll$αποδεκτά$\gg$ y) είναι το $[0,\infty)$.
- Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Για να βρούμε την αντίστροφη, γράφουμε $y = e^x$ και έχουμε $x = \ln y$. Δηλαδή, αφού πρέπει $x = f^{-1}(y)$, έχουμε $f^{-1}(y) = \ln y$. Για το πεδίο ορισμού της f^{-1}, υπολογίζουμε το σύνολο τιμών της f. Δηλαδή το $f(\mathbb{R}) = (0,\infty)$.
- Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = -2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Για να βρούμε την αντίστροφη, γράφουμε $y = -2x + 1$ και έχουμε $x = -(y-1)/2$. Δηλαδή, αφού πρέπει $x = f^{-1}(y)$, έχουμε $f^{-1}(y) = -(y-1)/2$. Για το πεδίο ορισμού της f^{-1}, υπολογίζουμε το σύνολο τιμών της f. Δηλαδή το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Στην ουσία η f^{-1} είναι μία συνάρτηση που ≪βλέπει≫ την f από τον άξονα των y.



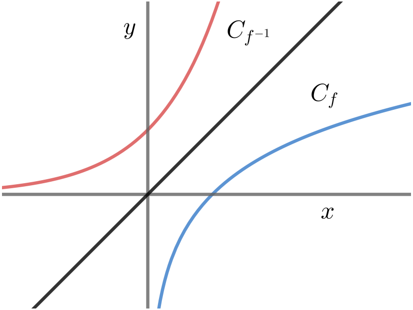
Επειδή όμως (συνήθως) όλες τις συναρτήσεις τις βλέπουμε ως προς το x (δηλαδή ως προς τον οριζόντιο άξονα), μπορούμε να φέρουμε τα y στη θέση των x, κάνοντας μία ανάκλαση, ως προς την ευθεία $y = x$.

Πρόταση

Έστω $f : A \to B$ μία $1-1$ συνάρτηση και $f^{-1} : f(A) \to A$ η αντίστροφή της. Τα γραφήματα C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικά ως προς τη διαγώνιο $y = x$.

Απόδειξη: Είπαμε ότι η f^{-1} είναι μία συνάρτηση που ≪βλέπει≫ την f από τον άξονα των y, καθώς επίσης κι ότι μπορούμε να φέρουμε τα y στη θέση των x, κάνοντας μία ανάκλαση, ως προς την ευθεία $y = x$. Έτσι λοιπόν, η $C_{f^{-1}}$ προκύπτει από την C_f με την προηγούμενη ανάκλαση, κι άρα οι C_f, $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $y = x$. $\square$

Παρακάτω απεικονίζονται οι $\ln x$ και η αντίστροφή της e^x.



1. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:
   1.1 $f_1 : \{1, 2, 3\} \to \{6, 7\}$ με $f_1(1) = 6$, $f_1(2) = 6$, $f_1(3) = 7$.
   1.2 $f_2 : \{0, 1\} \to \{\square, \triangle\}$ με $f_2(0) = \square$, $f_2(1) = \triangle$.
   1.3 $f_3 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με$f_3(x) = x^2$.
   1.4 $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_4(x) = x^2$.
   1.5 $f_5 : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ με$f_5(x) = \log(\sqrt{x} - 1)$.
   1.6 $f_6 : (0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f_6(x) = 1 - x + 1/x$.

   Ποιες από τις $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ είναι $1 - 1$; Να βρείτε τις αντίστροφες συναρτήσεις των $1 - 1$ συναρτήσεων που βρήκατε.
2. Ελέγξτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι αύξουσες, γνησίως αύξουσες, φθίνουσες ή γνησίως φθίνουσες.
   2.1 $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_1(x) = x^2 - 2x + 2$.
   2.2 $f_2 : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f_2(x) = x^2 - 2x + 2$.
   2.3 $f_3 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f_3(x) = 1 - x - x^2 \log x$.
   2.4 $f_4 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με $f_4(x) = e^{-x}/|x|$.
   2.5 $f_5 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f_5(x) = (x - 20)^3 \log(x^2 + 1) - 1/x^8 + 23$.
   2.6 $f_6 : (0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f_6(x) = 1 - x + 1/x$.

Ορισμός (Όρια συναρτήσεων - διαισθητικά)

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η f έχει όριο καθώς τα x πλησιάζουν το x_0 εάν συμβαίνει το εξής: Καθώς τα x πλησιάζουν το x_0 από κάθε κατεύθυνση αλλά δεν το πιάνουν, οι τιμές $f(x)$ πλησιάζουν έναν αριθμό $\ell \in \mathbb{R}$. Ο αριθμός ℓ λέγεται όριο της f στο x_0.

Ορισμός (Τείνει)

Αντί να γράφουμε κάθε φορά «το x πλησιάζει το x_0», θα συμβολίζουμε $x \to x_0$. Διαβάζουμε «το x τείνει στο x_0». Αντίστοιχα, αν η $f(x)$ πλησιάζει το ℓ, θα γράφουμε $f(x) \to \ell$.
Με τα παραπάνω μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε τον ορισμό του ορίου με τον εξής τρόπο: Θα λέμε ότι η f έχει όριο ℓ στο x_0 εάν:

$$\text{Καθώς } x \to x_0, \text{ έχουμε } f(x) \to \ell$$

Συμπυκνώνοντας τον συμβολισμό ακόμα παραπάνω, γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Ορισμός (Τείνει από κατεύθυνση)

Όπως θα δούμε παρακάτω, είναι χρήσιμο να ορίσουμε την κατά κατεύθυνση σύγκλιση.

- Εάν θέλουμε να προσεγγίσουμε μόνο με $x < x_0$, θα γράφουμε $x \to x_0^-$.
- Εάν θέλουμε να προσεγγίσουμε μόνο με $x > x_0$, θα γράφουμε $x \to x_0^+$.

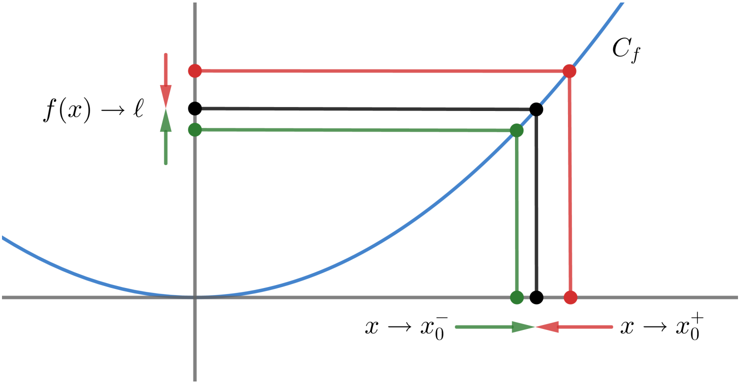
Πρόταση

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$. Αληθεύει το εξής:

$$\text{Εάν για } x \to x_0^- \text{ και για } x \to x_0^+ \text{ έχουμε } f(x) \to \ell, \text{ τότε } \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Δηλαδή, εάν τα ≪πλευρικά όρια≫ υπάρχουν και είναι ίσα με ℓ, τότε το όριο συνολικά υπάρχει και είναι ℓ.

Απόδειξη: Εάν το $x \to x_0$, τότε $x < x_0$ ή $x > x_0$. Σε κάθε περίπτωση όμως, το $f(x)$ θα είναι κοντά στο ℓ, από την υπόθεση. Δηλαδή $f(x) \to \ell$. □



C_f
$f(x) \to \ell$
$x \to x_0^-$
$x \to x_0^+$

Παρατήρηση

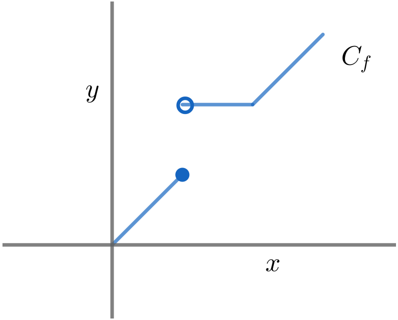
Για να προσεγγίσουμε $x \to x_0$ με στοιχεία $x \in A$, πρέπει να υπάρχει διάστημα $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ εντός του A (δηλαδή $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \subseteq A$). Θέλουμε δηλαδή να μπορεί να γίνει προσέγγιση, είτε από τα αριστερά, είτε από τα δεξιά.

Παρατήρηση

Εάν καθώς $x \to x_0^-$ έχουμε $f(x) \to \ell$ και καθώς $x \to x_0^+$ έχουμε $f(x) \to \mu$ με $\ell \neq \mu$, τότε το όριο $\lim_{x \to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει. Δηλαδή, η f δεν προσεγγίζει μοναδική τιμή.
Επίσης, υπάρχει περίπτωση, καθώς $x \to x_0$, η $f(x)$ να μην προσεγγίζει τίποτε (ούτε από τη μία μεριά, ούτε από την άλλη). Παραδείγματα των παραπάνω θα δούμε στις επόμενες διαφάνειες.

Εάν:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{όταν } x \in [0,1] \\ 2, & \text{όταν } x \in (1,2) \\ x, & \text{όταν } x \in [2,3] \end{cases}$$



Τότε για $x \to 1^-$, $f(x) \to 1$ και για $x \to 1^+$, $f(x) \to 2$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Εάν $x \to 1$ και το x είναι ρητός, τότε $\chi(x) \to 1$. Αλλιώς, εάν $x \to 1$ και το x είναι άρρητος, τότε $\chi(x) \to 0$. Δηλαδή, το όριο καθώς $x \to 1$ δεν υπάρχει.

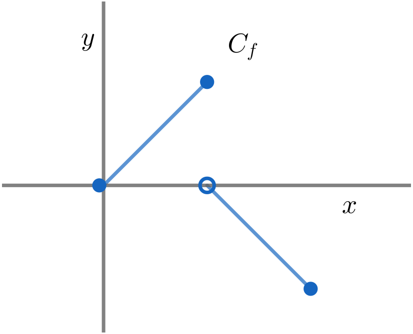
Ορισμός (Κατά κατεύθυνση όριο)

Εμείς ορίσαμε το όριο $f(x) \to \ell$ καθώς $x \to x_0$ ≪από κάθε κατεύθυνση≫. Μερικές φορές όμως, δεν έχει νόημα να αναφερόμαστε και στις δύο μεριές, γιατί η συνάρτηση μπορεί να μην ορίζεται εκατέρωθεν του x_0. Μπορεί επίσης να μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της συνάρτησης μόνο από τη μία μεριά κι όχι από την άλλη. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ασχολούμαστε με το όριο μόνο από εκεί που μπορεί να επιτευχθεί ή μας ενδιαφέρει:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \text{ ή } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

Εάν:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ όταν } x \in [0,1] \\ 1 - x, \text{ όταν } x \in (1,2] \end{cases}$$



τότε:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -1 \text{ και } \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

Επίσης:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \text{ και } \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$$

Οι ορισμοί που δώσαμε στα όρια είναι διαισθητικοί και όχι μαθηματικά ακριβείς. Για παράδειγμα, κάποιος θα μπορούσε να ρωτήσει τι ακριβώς εννοούμε όταν γράφουμε ≪το x προσεγγίζει το x_0≫. Η έννοια της προσέγγισης δεν είναι ορισμένη με μαθηματικά.

Ορισμός (Ο κανονικός ορισμός του ορίου συναρτήσεων)

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$ που έχει εκατέρωθέν του διαστήματα του A. Θα λέμε ότι η $f(x)$ έχει όριο ℓ καθώς $x \to x_0$ εάν συμβαίνει το ακόλουθο: Εάν θέλουμε να πάμε την f $\varepsilon-$κοντά στο ℓ (δηλαδή $|f(x) - \ell| < \varepsilon$), μπορούμε να διαλέξουμε αρκετά μικρό δ_ε ώστε για όλα τα x $\delta_\varepsilon-$ κοντά στο x_0 (δηλαδή $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$), να έχουμε:[3]

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Δηλαδή, διαλέγοντας τα x αρκετά κοντά στο x_0, το $f(x)$ έρχεται αρκετά κοντά στο ℓ. Με τη συνήθη διατύπωση, γράφουμε:[4]

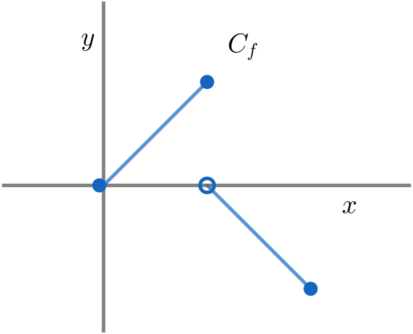
Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_\varepsilon > 0$ ώστε εάν $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ τότε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

[3] Το δ_ε έχει δείκτη ε για να δείξουμε ότι εξαρτάται από το ε.

[4] Κάποια βιβλία προτιμούν να γράφουν $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ (δηλαδή επιτρέπεται $x = x_0$). Εμείς θα θεωρούμε $x \neq x_0$, ώστε να ορίσουμε αργότερα την παράγωγο ευκολότερα.

Έστω:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ όταν } x \in [0,1] \\ 1-x, \text{ όταν } x \in (1,2] \end{cases}$$



Είναι άραγε το όριο $\lim_{x\to 1} f(x) = 1/2$; Η απάντηση είναι όχι: εάν θέλαμε να φέρουμε τα $f(x)$ (για x κοντά στο 1) $1/4-$κοντά στο $1/2$, δεν θα μπορούσαμε. Η f κοντά στο $1/2$ φτάνει το λιγότερο $1/2-$κοντά. Δηλαδή, για $\varepsilon = 1/4$, δεν μπορούμε να βρούμε αρκετά μικρό $\delta_\varepsilon > 0$ ώστε για $|x-1| < \delta_\varepsilon$ να έχουμε $|f(x) - 1/2| < 1/4$.

Παράδειγμα

- Έστω $f(x) = x$ και $x_0 = 1$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, εάν διαλέξουμε $\delta_\varepsilon = \varepsilon$, τότε για όλα τα x με $0 < |x-1| < \delta_\varepsilon = \varepsilon$ έχουμε:

$$|f(x) - 1| = |x - 1| < \varepsilon$$

  Οπότε, $\lim_{x\to 1} x = 1$.

- Έστω $f(x) = x^2$ και $x_0 = 1$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, στην ουσία ψάχνουμε κατάλληλο $\delta_\varepsilon > 0$ (που θα το βρούμε αργότερα). Για όλα τα x με $0 < |x-1| < \delta_\varepsilon$ έχουμε:

$$|f(x) - 1| = |x^2 - 1| = |(x-1)(x+1)| < \delta_\varepsilon \cdot |x+1|$$

  Επίσης, επειδή[5] $|x+1| - 2 \leqslant |x-1| < \delta_\varepsilon$, έχουμε $|x+1| < \delta_\varepsilon + 2$ και:

$$|f(x) - 1| < \delta_\varepsilon(\delta_\varepsilon + 2)$$

  Αν διαλέξουμε το δ_ε έτσι ώστε $\varepsilon = \delta_\varepsilon(\delta_\varepsilon + 2)$ (δηλαδή $\varepsilon + 1 = \delta_\varepsilon^2 + 2\delta_\varepsilon + 1 \Rightarrow \delta_\varepsilon = \sqrt{1+\varepsilon} - 1$), τότε έχουμε καταφέρει να δείξουμε ότι:

$$|f(x) - 1| < \varepsilon$$

  Επομένως, $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$.

[5] Ανάποδη τριγωνική ανισότητα: $|\alpha| - |\beta| \leqslant |\alpha + \beta|$.

Πρόταση

i. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$, ούτως ώστε το όριο $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$ να υπάρχει. Εάν $f(x) > 0$, τότε $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x) \geqslant 0$.

ii. Αντίστοιχα, εάν $f(x) < 0$, τότε $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant 0$.

Απόδειξη: Θα δείξουμε μόνο το i., καθώς το ii. μπορεί να αποδειχθεί από αυτό, εάν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $-f$.
Για το i. Για κάθε $\varepsilon > 0$, βρίσκουμε $\delta_\varepsilon > 0$ ώστε για τα $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ να έχουμε:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \text{ (ή αλλιώς } |\ell - f(x)| < \varepsilon)$$

Δηλαδή $-\varepsilon < \ell - f(x) < \varepsilon \Rightarrow f(x) - \varepsilon < \ell < f(x) + \varepsilon$. Επειδή $f(x) > 0$, τελικά έχουμε $-\varepsilon < \ell$ (ο άλλος κλάδος της διπλής ανισότητας δεν μας ενδιαφέρει). Έτσι λοιπόν, για τα διάφορα $\varepsilon > 0$ το ℓ ανήκει στις ημιευθείες $(-\varepsilon, \infty)$. Άρα, ανήκει στην τομή:

$$(-1, \infty) \cap (-1/2, \infty) \cap (-1/3, \infty) \cap \cdots, \text{ που είναι } [0, \infty)$$

Έτσι $\ell \in [0, \infty)$, ή αλλιώς, μεταφράζοντας, $\ell \geqslant 0$. □

Πρόταση

i. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε το $\ell = \lim_{x\to x_0} f(x)$ να υπάρχει. Εάν $\ell = \lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε υπάρχει περιοχή $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \subseteq A$ στην οποία $f(x) > 0$.[6]

ii. Αντίστοιχα, εάν $\ell = \lim_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε υπάρχει περιοχή $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \subseteq A$ στην οποία $f(x) < 0$.

Απόδειξη: Θα δείξουμε μόνο το i., καθώς το ii. μπορεί να αποδειχθεί από αυτό, εάν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $-f$.
Για το i. Ξέρουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε $\delta_\varepsilon > 0$ ώστε για τα $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ να ισχύει:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \text{ ή αλλιώς } \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$

Επιλέγουμε $\varepsilon = \ell/2$ και για τα x με $0 < |x - x_0| < \delta_{\ell/2}$ έχουμε $\ell - \ell/2 < f(x)$, δηλαδή $f(x) > \ell/2 > 0$. Έτσι λοιπόν, στο σύνολο $(x_0 - \delta_{\ell/2}, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_{\ell/2})$ η f είναι θετική. □

[6] Εάν $x_0 \in A$, τότε στην περιοχή μπορούμε να προσθέσουμε και το x_0.

Πρόταση (Ιδιότητες των ορίων)

Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις και $x_0 \in \mathbb{R}$. Εάν τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ υπάρχουν, τα ακόλουθα αληθεύουν:

i. $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$

ii. Για $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0}[\lambda f(x)] = \lambda \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$

iii. $\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$

iv. Εάν $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, $\lim_{x\to x_0}[f(x)/g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x)/ \lim_{x\to x_0} g(x)$

v. Εάν σε περιοχή του x_0 έχουμε $f(x) > 0$, τότε $\lim_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$

Παρατήρηση (Η παρατήρηση του Μανώλη Λάρδα)

Πρέπει να προσέξουμε ότι, εξ ορισμού, το όριο προϋποθέτει[7] οι συναρτήσεις να ορίζονται σε περιοχές $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ του x_0. Αν αντί «κανονικά» όρια θεωρούσαμε τα πλευρικά, θα είχαμε πρόβλημα. Για παράδειγμα, εάν $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ και $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = 0$, τότε το άθροισμα ορίζεται μόνο στο 0 και το όριο $\lim_{x\to 0}[f(x) + g(x)]$ δεν έχει νόημα (αφού η $f + g$ δεν ορίζεται σε περιοχή του μηδενός).

[7] Σε αντίθεση με τα πλευρικά όρια.

Παράδειγμα

- Για το όριο:
$$\lim_{x\to 1}(x-3)(x^8-x^5+1)$$
έχουμε $x-3\to -2$ και $x^8-x^5+1\to 1$, οπότε:
$$\lim_{x\to 1}(x-3)(x^8-x^5+1)=-2$$
- Για το όριο:
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-5x^2-8x+2}{x-4}$$
έχουμε $x^3-5x^2-8x+2\to 4$ και $x-4\to -5$, οπότε:
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-5x^2-8x+2}{x-4}=-\frac{4}{5}$$

- Για το:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{(x-1)(x+2)}$$

παρατηρούμε ότι $x-1 \to 0$, οπότε δεν μπορούμε να γράψουμε

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{\lim_{x\to 1}[x^2-1]}{\lim_{x\to 1}[(x-1)(x+2)]}$$

Παρόλα αυτά, με μία απλοποίηση με το $x-1$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x+2}$$

Τώρα έχουμε $x+1 \to 2$, $x+2 \to 3$, οπότε από την προηγούμενη πρόταση:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{3}$$

Θεώρημα (Κριτήριο παρεμβολής)

Έστω $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ τρεις συναρτήσεις και $x_0 \in \mathbb{R}$ ούτως ώστε $\ell = \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x)$. Εάν κοντά στο x_0 (δηλαδή σε περιοχή $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$) έχουμε:

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

τότε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Απόδειξη: Έστω $g(x) \to \ell$, $h(x) \to \ell$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_\varepsilon > 0$ ώστε για $|x - \delta_\varepsilon| < \varepsilon$ να έχουμε $|g(x) - \ell| < \varepsilon$ (μάλιστα, διαλέγοντας το δ_ε αρκετά μικρό, μπορούμε να πετύχουμε το ανάλογο με την h). Επομένως, από την διπλή ανισότητα:

$$-\varepsilon < g(x) - \ell \leqslant f(x) - \ell \leqslant h(x) - \ell < \varepsilon$$

Αυτά δείχνουν ότι $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Επομένως:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

$\square$

Μία άμεση συνέπεια του κριτηρίου της παρεμβολής είναι η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση («Μηδενική επί φραγμένη»)

Έστω δύο συναρτήσεις $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$. Εάν η g είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ με $|g(x)| \leqslant M$, τότε:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = 0$$

Απόδειξη: Εφόσον η g είναι φραγμένη, για κάποιο $M > 0$ ισχύει:

$$|g(x)| \leqslant M \Rightarrow |f(x)g(x)| \leqslant M \cdot |f(x)|$$

Δηλαδή:

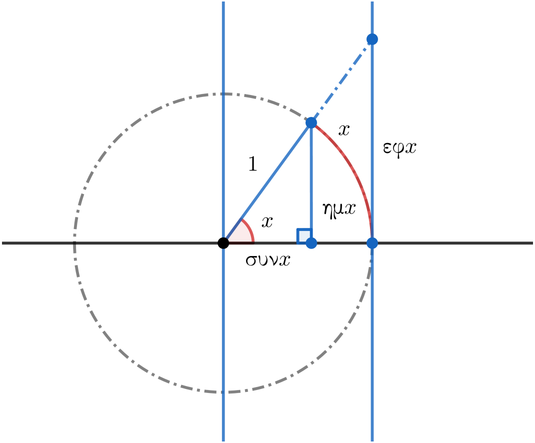
$$-M \cdot |f(x)| \leqslant f(x)g(x) \leqslant M \cdot |f(x)|$$

Τώρα όμως $f(x) \to 0$, οπότε $|f(x)| \to 0$. Από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε το ζητούμενο. □

Παρατήρηση

Από τον τριγωνομετρικό κύκλο, παρατηρούμε ότι αληθεύει για $x \in [0, \pi/2)$ η διπλή ανισότητα:

$$\text{ημ}x \leqslant x \leqslant \text{εφ}x$$



Πρόταση

Από την προηγούμενη παρατήρηση, και μάλιστα από την αριστερή ανισότητα, έπεται το εξής:

$$|\text{ημ}x| \leqslant |x|, \text{ όταν } x \in (-\pi/2, \pi/2)$$

Απόδειξη: Κατ' αρχάς, για τα $x \in [0, \pi/2)$ έχουμε ήδη δει ότι ημ$x \leqslant x$. Δηλαδή, επειδή όλα είναι θετικά, $|\text{ημ}x| \leqslant |x|$.
Εάν θεωρήσουμε τώρα αρνητικά $x \in (-\pi/2, 0]$, μπορούμε να γράψουμε $x = -|x|$. Έπειτα, εφαρμόζοντας την ανισότητα που ήδη έχουμε δει για τα θετικά, παίρνουμε ημ$(|x|) \leqslant |x|$ ή αλλιώς ημ$(-|x|) \geqslant -|x|$. Έχουμε έτσι δείξει ότι:

$$\text{ημ}x \geqslant x, \text{ και επειδή τα πάντα είναι αρνητικά, } |\text{ημ}x| \leqslant |x|$$

$\square$

Όλα τα παραπάνω τα χρειαζόμαστε για να δείξουμε τα εξής σημαντικά όρια:

Πρόταση

Αληθεύουν τα εξής:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1 \text{ και } \lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$$

Απόδειξη: Για το πρώτο όριο: Με την προηγούμενη πρόταση δείξαμε ότι:

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|\leqslant 1, \text{ με } x\in(-\pi/2,\pi/2)\setminus\{0\}$$

Επίσης, από προηγούμενη παρατήρηση έχουμε $x\leqslant \varepsilon\varphi x$, $x\in(-\pi/2,0]$. Λόγω συμμετρίας[8], έχουμε $|x|\leqslant|\varepsilon\varphi x|$, $x\in(-\pi/2,\pi/2)$. Έτσι λοιπόν:

$$|\sigma\upsilon\nu x|=\left|\frac{\eta\mu x}{\varepsilon\varphi x}\right|\leqslant\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|, \text{ για } x\in(-\pi/2,\pi/2)\setminus\{0\}$$

και κατά συνέπεια:

$$|\sigma\upsilon\nu x|\leqslant\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|\leqslant 1$$

Από το κριτήριο της παρεμβολής και επειδή η $\eta\mu x/x$ είναι πάντα θετική γύρω από το μηδέν:[9]

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$$

[8] Οι $\varepsilon\varphi x$, x είναι περιττές συναρτήσεις.
[9] Οι $\eta\mu x$, x είναι περιττές συναρτήσεις.

Για το δεύτερο όριο: Το δεύτερο όριο θα προκύψει από το πρώτο. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι:

$$\text{συν}x = \text{συν}^2(x/2) - \text{ημ}^2(x/2) \Rightarrow \frac{\text{συν}x - 1}{x} = \frac{\text{συν}^2(x/2) - 1}{x} - \frac{\text{ημ}^2(x/2)}{x}$$

Επειδή όμως $\text{συν}^2\theta + \text{ημ}^2\theta = 1$:

$$\frac{\text{συν}x - 1}{x} = \frac{-\text{ημ}^2(x/2)}{x} - \frac{\text{ημ}^2(x/2)}{x}$$

ή αλλιώς:

$$\frac{\text{συν}x - 1}{x} = -\text{ημ}x \cdot \frac{\text{ημ}(x/2)}{2 \cdot x/2} - \text{ημ}x \cdot \frac{\text{ημ}(x/2)}{2 \cdot x/2}$$

Παίρνοντας όριο καθώς $x \to 0$ και χρησιμοποιώντας το όριο $\text{ημ}\theta/\theta \to 1$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{συν}x - 1}{x} = -0 \cdot 1/2 - 0 \cdot 1/2 = 0$$

$\square$

Ορισμός (Συναρτήσεις που «εκρήγνυνται» και άπειρα όρια)

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η f «εκρήγνυνται» στο x_0 εάν καθώς $x \to x_0^-$ ή $x \to x_0^+$ έχουμε $f(x) \to \pm\infty$. Στην περίπτωση που και από τις δύο μεριές τα όρια συμφωνούν, θα γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \text{ (ή αντίστοιχα } -\infty)$$

Ορισμός (Άπειρα όρια - κανονικός ορισμός)

Έστω Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Θα λέμε ότι $f(x) \to -\infty$ καθώς $x \to x_0$ εάν:

  Για κάθε M, υπάρχει δ_M ώστε εάν $0 < |x - x_0| < \delta_M$ τότε $f(x) < M$

  Συμβολίζουμε:

  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

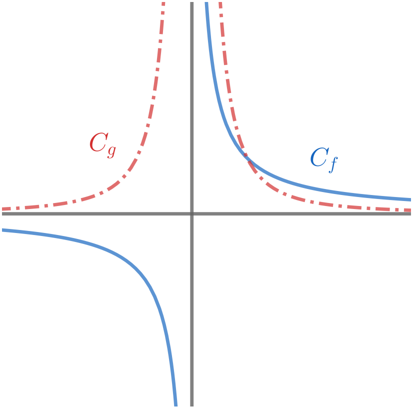
- Θα λέμε ότι $f(x) \to \infty$ καθώς $x \to x_0$ εάν:

  Για κάθε M, υπάρχει δ_M ώστε εάν $0 < |x - x_0| < \delta_M$ τότε $f(x) > M$

  Συμβολίζουμε:

  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Παρακάτω βλέπουμε ότι η $f(x) = 1/x$ εκρήγνυται στο 0, χωρίς να έχει όριο. Αντίθετα, η $g(x) = 1/x^2$ εκρήγνυται στο 0 και έχει όριο ∞.



Ορισμός (Ασυμπτωτικά όρια)

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού που περιέχει ημιευθεία. Θα λέμε ότι η f έχει όριο καθώς $x \to -\infty$ ή $x \to \infty$ εάν η f προσεγγίζει μία ≪τιμή στο άπειρο≫.

Ορισμός (Ασυμπτωτικά όρια - κανονικός ορισμός)

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού που περιέχει ημιευθεία.

- Θα λέμε ότι η f έχει όριο ℓ καθώς $x \to -\infty$ εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει αρκετά μικρό x_ε ώστε για τα $x < x_\varepsilon$ να έχουμε:

  $$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

  Συμβολίζουμε:

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

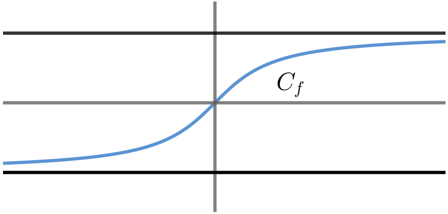
- Θα λέμε ότι η f έχει όριο ℓ καθώς $x \to \infty$ εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει αρκετά μεγάλο x_ε ώστε για τα $x > x_\varepsilon$ να έχουμε:

  $$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

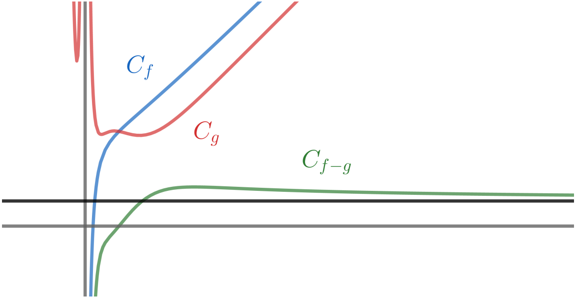
  Συμβολίζουμε:

  $$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$$

Παρακάτω απεικονίζεται μία συνάρτηση για την οποία τα όρια $\ell = \lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\mu = \lim_{x\to\infty} f(x)$ υπάρχουν. Η C_f φαίνεται να προσεγγίζει τις οριζόντιες μαύρες ευθείες $y = \ell$ και $y = \mu$.



Στην πραγματικότητα, συνήθως βλέπουμε αυτά τα όρια σε διαφορές συναρτήσεων. Εάν η διαφορά δύο συναρτήσεων τείνει κάπου -έστω στο ℓ- σημαίνει ότι οι δύο συναρτήσεις πλησιάζουν σε απόσταση ℓ καθώς $x \to \pm\infty$



Παραπάνω βλέπουμε ότι για τις $f(x) = x + 2\log x/x + 3$ και $g(x) = x + 3/x^2 + 7x^2/e^x + 1$ η διαφορά $f - g$ προσεγγίζει την τιμή $y = 2$. Επομένως, οι f και g καθώς $x \to \infty$ τείνουν να έχουν απόσταση 2.

Παράδειγμα

- Εάν το n είναι άρτιος:

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \lim_{x \to \infty} x^n = \infty$$

- Εάν το n είναι περιττός:

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty \text{ και } \lim_{x \to \infty} x^n = \infty$$

- Εάν $\alpha > 1$, τότε:

$$\lim_{x \to -\infty} \alpha^x = 0 \text{ και } \lim_{x \to \infty} \alpha^x = \infty$$

- Εάν $0 < \alpha < 1$, τότε:

$$\lim_{x \to -\infty} \alpha^x = \infty \text{ και } \lim_{x \to \infty} \alpha^x = 0$$

- Για τον λογάριθμο (τόσο τον $\log_{10}$ όσο και τον $\log_e = \ln$) έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} \log x = -\infty \text{ και } \lim_{x \to \infty} \log x = \infty$$

1. Να υπολογίσετε τα όρια καθώς $x \to 1$ των παρακάτω συναρτήσεων
   1.1
   $$\frac{x^2-1}{x^2+1}$$
   1.2
   $$\frac{x^3+2x^2-x-2}{x-1}$$
   1.3
   $$\frac{\eta\mu^2(x-1)+\eta\mu[(x-1)/3]}{x^2-1}$$
2. Αποδείξτε (με τα ε και δ) ότι για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ έχουμε $\lim_{x\to x_0} \lambda x = \lambda x_0$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.
3. Αποδείξτε ότι, για $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_k \in \mathbb{R})$:
   3.1 $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$
   3.2 Εάν $a_n > 0$ και το n είναι ζυγός, τότε $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$.
   3.3 Εάν $a_n < 0$ και το n είναι περιττός, τότε $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$.
   [Υπόδειξη για τα 3.2, 3.3: Διαιρέστε το $P(x)$ με το x^n].
4. Δείξτε ότι:
   $$\lim_{x\to\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$$

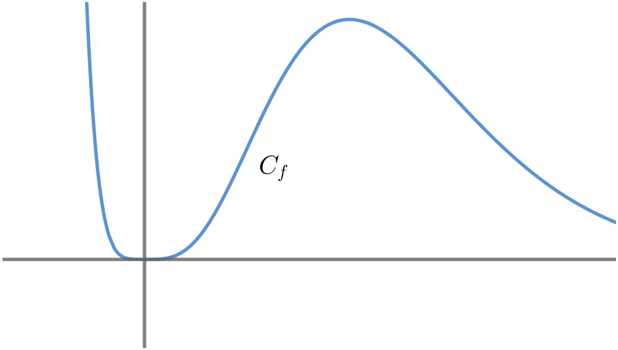
Εισάγωντας την έννοια της συνέχειας, θα μπορούμε να μελετήσουμε συναρτήσεις των οποίων το γράφημα δεν ≪σπάει≫.

Ορισμός (Συνέχεια)

Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με το I να είναι διάστημα.

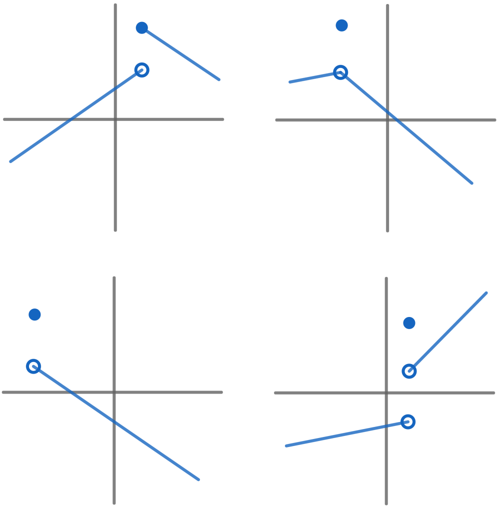
- Θεωρούμε $x_0 \in I$ που δεν είναι άκρο. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 εάν:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$
- Θεωρούμε (αν υπάρχει) $x_0 \in I$ αριστερό άκρο. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 εάν:
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$
- Θεωρούμε (αν υπάρχει) $x_0 \in I$ δεξί άκρο. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 εάν:
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$
- Γενικά, θα λέμε ότι η f είναι συνεχής σε όλο το I εάν η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in I$.

Τα γραφήματα των συνεχών συναρτήσεων[10] -όπως προδίδει το όνομά τους- δεν έχουν ασυνέχειες. Δηλαδή, δεν υπάρχουν ≪σπασίματα≫.



[10] Προσοχή! Πρέπει να ορίζονται σε διάστημα, αλλιώς είναι δυνατόν κάποιο σπάσιμο. Σκεφτείτε ένα παράδειγμα.

Μερικά γραφήματα ασυνεχών συναρτήσεων ακολουθούν:



Παρατήρηση

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου με τα ε, δ, είναι δυνατόν να ορίσουμε τη συνέχεια σε εσωτερικό σημείο $x_0 \in A$ με τον ακόλουθο τρόπο: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_\varepsilon > 0$ ώστε εάν $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ τότε:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να διαλέξουμε $\delta_\varepsilon = \varepsilon$. Τότε έχουμε ότι για $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon = \varepsilon$:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Αντίστοιχα, διαλέγοντας $\delta_\varepsilon = \varepsilon/|\lambda|$ μπορούμε να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις $g(x) = \lambda x$ είναι συνεχείς. Αντίθετα, η:

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } x < 0 \\ 1, & \text{όταν } x \geqslant 0 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο 0. Πράγματι, από τα αριστερά του 0 οι τιμές της $h(x)$ απέχουν το λιγότερο 1 από το $h(0) = 1$. Δηλαδή, εάν διαλέξουμε $\varepsilon = 1/2$, δεν μπορούμε να φέρουμε (για τα x αριστερά του μηδενός) τα $h(x)$ $1/2-$κοντά στο $h(0) = 1$, όσο μικρό δ_ε κι αν διαλέξουμε.

Παράδειγμα

Μερικά ακόμη παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

- Τα πολυώνυμα $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
- Τα ρητά πολυώνυμα $q(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) / \left(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k\right)$, στα διαστήματα στα οποία ορίζονται.
- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημ, συν.
- Η εφαπτομένη εφ, στα διαστήματα στα οποία ορίζεται.
- Οι εκθετικές συναρτήσεις α^x.
- Οι διάφοροι λογάριθμοι $\log_\alpha x$.
- Οι ρίζες $\sqrt[k]{x}$.

Προσοχή: Αν κανείς θυμηθεί το γράφημα της εφαπτομένης, θα αναρρωτηθεί για ποιον λόγο λέμε ότι είναι συνεχής, ενώ έχει σπασίματα. Η απάντηση είναι η εξής:

- Ορίσαμε τη συνέχεια μόνο σε σημεία x_0 που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Για την εφαπτομένη, δεν έχει νόημα να μελετήσουμε τη σενέχεια στο $\pi/2$, αφού εκεί δεν ορίζεται (εφ$(\pi/2) = \pm\infty$).
- Ορίσαμε τη συνέχεια σε διαστήματα.

Παρατήρηση

Εφόσον τα όρια διατηρούνται στις συνήθεις πράξεις, έχουμε τα ακόλουθα:
Εάν οι $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $x_0 \in A$:

- Η $\lambda f(x)$ είναι συνεχής στο x_0 ($\lambda \in \mathbb{R}$).
- Η $f(x) + g(x)$ είναι συνεχής στο x_0.
- Η $f(x)g(x)$ είναι συνεχής στο x_0.
- Η $f(x)/g(x)$ είναι συνεχής στο x_0 (εάν ορίζεται εκεί).

Με την προηγούμενη αυτή παρατήρηση, εφαρμόζοντας τις πράξεις, μπορούμε πρώτα-πρώτα να δείξουμε ότι κάθε πολυώνυμο είναι συνεχείς συνάρτηση.

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$$

Έπειτα, με λίγες ακόμη πράξεις προκύπτει ότι κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής στα διαστήματα που ορίζεται.

$$q(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{m} b_k x^k}$$

Το βασικό θεώρημα που μας κατασκευάζει συνεχείς συναρτήσεις είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα (Η συνέχεια της σύνθεσης)

Έστω $f : A_f \to A_g$ και $g : A_g \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις στα x_0 και $y_0 = f(x_0)$ αντίστοιχα. Τότε η σύνθεση $(g \circ f)(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο x_0.

Απόδειξη: Για κάθε $\varepsilon > 0$, εφόσον η g είναι συνεχής στο x_0, μπορούμε να βρούμε δ_ε ώστε για τα $0 < |y - y_0| < \delta_\varepsilon$ να έχουμε:

$$|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

Από την άλλη, η f είναι συνεχής στο x_0, οπότε μπορούμε να βρούμε $\eta_{\delta_\varepsilon} > 0$ ώστε για τα $0 < |x - x_0| < \eta_{\delta_\varepsilon}$ να έχουμε:

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta_\varepsilon$$

Δηλαδή, αν τον ρόλο των y, y_0 πάρουν τα $f(x), f(x_0)$, έχουμε το εξής: Για τα $0 < |x - x_0| < \eta_{\delta_\varepsilon}$ έχουμε $|f(x) - f(x_0)| < \delta_\varepsilon$, οπότε τότε:

$$\left|g\left(f(x)\right) - g\left(f(x_0)\right)\right| < \varepsilon$$

Δείξαμε[11] έτσι ότι η σύνθεση $(f \circ g)(x)$ είναι συνεχής στο x_0. $\square$

[11] Για την ακρίβεια, δεν εξετάσαμε τα άκρα. Γίνεται όμως παρόμοια.

Παράδειγμα

Γνωρίζοντας ότι οι πράξεις συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχείς συναρτήσεις καθώς επίσης και το ότι η σύνθεση συνεχών είναι συνεχής, μπορούμε να δώσουμε τα ακόλουθα παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων:

- Η εφ είναι συνεχής συνάρτηση (στα διαστήματα που ορίζεται), αφού γράφεται $\text{εφ}x = \text{ημ}x/\text{συν}x$ με τις ημ, συν να είναι συνεχείς.
- Η $\sqrt{x^2-16}$ είναι συνεχής στο $[4,\infty)$ και στο $(-\infty,-4]$, για τους εξής λόγους: Η x είναι συνεχής, άρα και η x^2. Αφού η x^2 είναι συνεχής, η $f(x)=x^2-16$ επίσης θα είναι συνεχής. Παίρνοντας τη ρίζα $g(x)=\sqrt{x}$, η $(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-16}$ θα είναι συνεχής.
- Η $1/e^{-2x+1}$ είναι συνεχής συνάρτηση. Πράγματι, μπορούμε με πράξεις να δούμε ότι -εφόσον η x είναι συνεχής- η $-2x+1$ θα είναι συνεχής. Επιπλέον, εάν $f(x)=-2x+1$ και $g(x)=e^x$, η $(g\circ f)(x)=e^{-2x+1}$ θα είναι συνεχής. Θεωρώντας την $h(x)=1/x$, έπεται τελικά ότι η:

$$[h\circ(f\circ g)](x)=\frac{1}{(f\circ g)(x)}=\frac{1}{e^{-2x+1}}$$

  είναι συνεχής.

1. Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στα διαστήματα που ορίζονται.
   1.1 $x^2 - 5 + x + \sqrt{x^3 - 1}$
   1.2 $\sqrt{\log(x^2 + 1)}$
   1.3 $\log x / \ln x^2$
   1.4 $\sigma\varphi x = \sigma\upsilon\nu x / \eta\mu x$
2. Είναι συνεχείς οι παρακάτω συναρτήσεις;
   2.1
   $$f_1(x) = \begin{cases} x, \text{ όταν } x \in (0,1] \\ 2 - x, \text{ όταν } x \in (1,3] \end{cases}$$
   2.2
   $$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x} + 3x^2 - 1, \text{ όταν } x \neq 0 \\ 0, \text{ όταν } x = 0 \end{cases}$$
   2.3
   $$f_3(x) = \begin{cases} x, \text{ όταν } x^2/2 + x \in (0,1] \\ \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}, \text{ όταν } x \in (1,3] \end{cases}$$

Στη συνέχεια θα θέλαμε να αναφερθούμε σε σημαντικά θεωρήματα που σχετίζονται με τις συνεχείς συναρτήσεις. Για να μπορούμε όμως να δώσουμε κάποιες στοιχειώδεις αποδείξεις, πρώτα χρειαζόμαστε την έννοια της ακολουθίας.

Ορισμός (Ακολουθίες)

Κάθε συνάρτηση της μορφής $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ θα λέγεται (πραγματική) ακολουθία. Κάθε ακολουθία μπορούμε να τη σκεφτόμαστε σαν ένα άπιερο διάνυσμα:

$$s = (s_1, s_2, s_3, s_4, \cdots)$$

όπου συμβολίζουμε $s_k = s(k)$.

Στις ακολουθίες μπορεί να οριστεί μία έννοια σύγκλισης, την οποία θα δούμε παρακάτω. Στην ουσία, αν βάλουμε τους s_k πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, ενδέχεται οι s_k να είναι διάσπαρτοι ή να ≪συμπυκνώνονται≫ σε ένα σημείο. Το σημείο στο οποίο ≪συμπυκνώνονται≫ από ένα σημείο και μετά, θα το λέμε όριο. Επίσης, θα δούμε κάποιες ιδιότητες των ορίων που ισχύουν τόσο σε συναρτήσεις (για τις συναρτήσεις τις έχουμε δει παραπάνω), όσο και σε ακολουθίες.

Ορισμός (Σύγκλιση ακολουθίας)

Έστω s μία ακολουθία και ℓ ένας αριθμός. Εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_ε ώστε για τα $n > n_\varepsilon$ να έχουμε:

$$|s_n - \ell| < \varepsilon$$

θα λέμε ότι η ακολουθία s έχει όριο ℓ. Αυτό σημαίνει ότι -από ένα σημείο και μετά- όλοι οι όροι της s φτάνουν πολύ κοντά ($\varepsilon-$κοντά) στο ℓ. Συμβολίζουμε:

$$s_n \to \ell$$

ή αλλιώς:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \ell$$

Παρακάτω θα δούμε μερικά παραδείγματα ακολουθιών γραφικά. Θα δούμε την εικόνα των σημείων στην ευθεία καθώς και της γραφικής παράστασης μίας ακολουθίας.

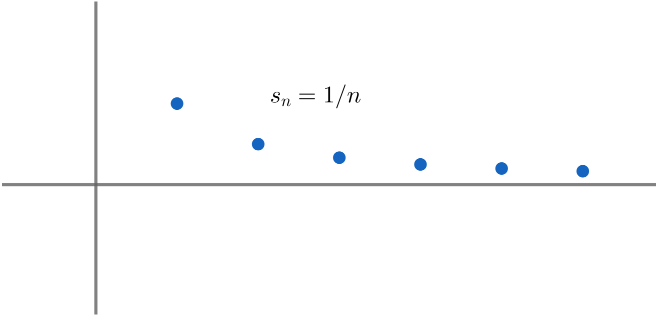
Παρακάτω απεικονίζουμε δύο ακολουθίες ως σημεία στην πραγματική ευθεία.

$a_n = n$

$s_n = 1/n$

[Το ● είναι το όριο].

Παρακάτω απεικονίζουμε την $s_n = 1/n$ ως γράφημα.



Στη σελίδα 80 είδαμε μία πολύ βασική πρόταση για τα όρια συναρτήσεων. Ανάλογή της ισχύει και σε ακολουθίες.

Πρόταση

i. Έστω $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ μία ακολουθία ώστε το όριο $\ell = \lim_{n\to\infty} s_n$ να υπάρχει. Εάν $s_n > 0$, τότε $\ell = \lim_{n\to\infty} s_n \geqslant 0$.

ii. Αντίστοιχα, εάν $s_n < 0$, τότε $\ell = \lim_{n\to\infty} s_n \leqslant 0$.

Απόδειξη: Θα δωθεί ως άσκηση. Μοιάζει με την απόδειξη της σελίδας 80. □

Ορισμός (Φραγμένες ακολουθίες)

Θα λέμε ότι μία ακολουθία s είναι φραγμένη εάν υπάρχει $M > 0$ ώστε για όλα τα n να έχουμε:

$$|s_n| \leqslant M$$

Ορισμός (Μονότονες ακολουθίες)

Έστω s μία πραγματική ακολουθία.

- Η s θα λέγεται αύξουσα εάν για κάθε $n < m$ έχουμε $s_n \leqslant s_m$.
- Η s θα λέγεται φθίνουσα εάν για κάθε $n < m$ έχουμε $s_n \geqslant s_m$.
- Η s θα λέγεται γνησίως αύξουσα εάν για κάθε $n < m$ έχουμε $s_n < s_m$.
- Η s θα λέγεται γνησίως φθίνουσα εάν για κάθε $n < m$ έχουμε $s_n > s_m$.

Έχοντας πει αυτά, βασικό και χρήσιμο εργαλείο είναι το επόμενο:

Πρόταση

Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ έχει όριο ℓ.

Απόδειξη: Ας πούμε για ευκολία ότι η s είναι γνησίως αύξουσα και $s_n \leqslant M$ (οι άλλες περιπτώσεις γίνονται παρόμοια). Εφόσον η s είναι φραγμένη από το M, το $\sigma = \sup s(\mathbb{N})$ είναι πραγματικός αριθμός. Τώρα, αν διαλέξουμε $\varepsilon > 0$, στο σύνολο $[\sigma - \varepsilon, \sigma]$ μπορεί να βρεθεί τουλάχιστον ένας όρος s_{n_ε} της ακολουθίας (αλλιώς το σ δεν θα ήταν ελάχιστο άνω φράγμα). Επειδή η s είναι γνησίως αύξουσα, για κάθε $n > n_\varepsilon$ έχουμε $s_n \in [\sigma - \varepsilon, \sigma]$, δηλαδή:

$$|s_n - \sigma| < \varepsilon$$

Δείξαμε λοιπόν ότι η s έχει όριο $\ell = \sigma = \sup s(\mathbb{N})$. $\square$

Παρατήρηση

Εάν έχουμε $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ μία ακολουθία με $s(\mathbb{N}) \subseteq [a, b]$, τότε μπορούμε να διαλέξουμε κάποιους από τους όρους της ακολουθίας, ας πούμε τους $s_{k_1}, s_{k_2}, \cdots$ με την k_n να είναι αύξουσα και $s_{k_n} \to \ell$ για κάποιο $\ell \in [a, b]$.

Απόδειξη: Διαλέγουμε $y_1 = s_{k_1}$ για τυχόν k_1. Έπειτα, μπορούμε να χωρίσουμε το $[a, b]$ στη μέση και να ελέγξουμε ποιο από τα δύο διαστήματα έχει άπειρους όρους της ακολουθίας. Σε αυτό που έχει άπειρους, διαλέγουμε τυχόν s_{k_2}. Μάλιστα, το k_2 μπορεί να επιλεγεί μεγαλύτερο από το k_1, αφού οι όροι της ακολουθίας είναι άπειροι. Στο διάστημα με τους άπειρους όρους τώρα, επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία, χωρίζοντάς το στη μέση. Συνεχίζουμε με ανάλογο τρόπο, και κατασκευάζουμε ακολουθία $y_n = s_{k_n}$ με k_n αύξουσα και $y_n \to \ell$ για κάποιο $\ell \in [a, b]$ (σημειώστε ότι κάθε φορά οι όροι y_n έρχονται όλο και πιο κοντά, αφού το διάστημα από τους οποίους τους επιλέγουμε γίνεται όλο και μικρότερο). $\square$

Έχοντας μιλήσει για ακολουθίες, είναι δυνατόν να προχωρίσουμε σε σημαντικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις.

Θεώρημα (Bolzano)

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση σε διάστημα $[a, b]$. Εάν οι τιμές $f(a)$, $f(b)$ είναι ετερόσημες και όχι μηδέν, υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ με $f(x) = 0$.

Απόδειξη: Υποθέτυμε για ευκολία ότι $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Κατασκευάζουμε δύο ακολουθίες με τον εξής τρόπο:

$$s_1 = a \text{ και } j_1 = b$$

Έπειτα, κοιτάμε το μέσο του $[s_1, j_1]$, δηλαδή το $(s_1 + j_1)/2 = (a + b)/2$. Εάν η f εκεί δίνει κάτι αρνητικό:

$$s_2 = (s_1 + j_1)/2 \text{ και } j_2 = b$$

ενώ εάν δίνει κάτι θετικό:

$$s_2 = a \text{ και } j_2 = (s_1 + j_1)/2$$

Συνεχίζουμε ανάλογα, κοιτάζοντας το μέσο του $[s_k, j_k]$, δηλαδή το $(s_k + j_k)/2$. Εάν η f δίνει κάτι αρνητικό:

$$s_{k+1} = (s_k + j_k)/2 \text{ και } j_{k+1} = j_k$$

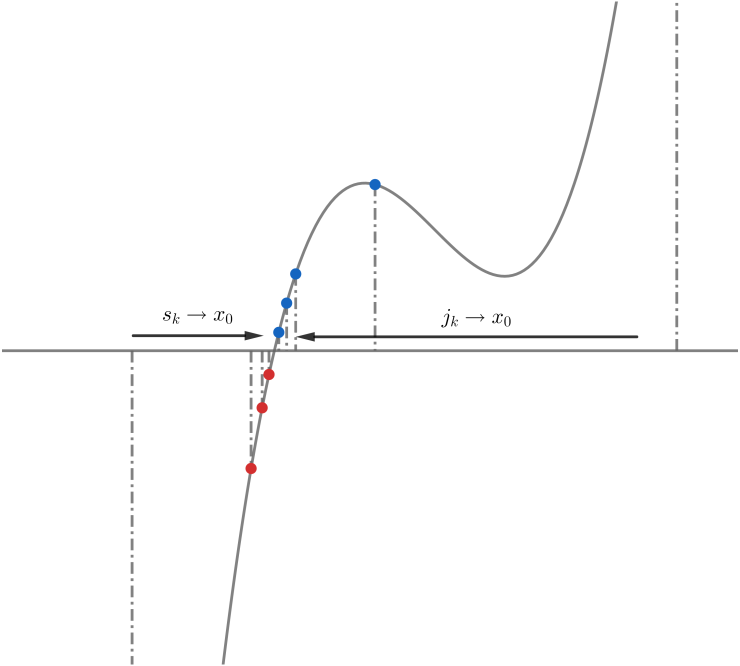
ενώ εάν δίνει κάτι θετικό:

$$s_{k+1} = s_k \text{ και } j_{k+1} = (s_k + j_k)/2$$

Σε περίπτωση που κατά τη διαδικασία βρούμε $f\big((s_k + j_k)/2\big) = 0$ προφανώς σταματάμε τη διαδικασία αναζήτησης. Στη χειρότερη περίπτωση όμως, θα χρειαστεί να ψάξουμε άπειρες φορές την τιμή που μηδενίζει την f. Θεωρούμε μόνο αυτήν την περίπτωση λοιπόν. Από τον ορισμό των ακολουθιών ισχύουν τα εξής:

- Η s είναι αύξουσα και φραγμένη.
- Η j είναι φθίνουσα και φραγμένη.
- $s_k - j_k \to 0$
- Για κάθε k έχουμε $f(s_k) < 0$
- Για κάθε k έχουμε $f(j_k) > 0$

Ας θεωρήσουμε x_0 το κοινό όριο των s, j (το οποίο υπάρχει από την πρόταση στη σελίδα 112, και είναι ίδιο για τις δύο ακολουθίες, αφού $s_k - j_k \to 0$). Τότε, από την πρόταση στη σελίδα 111 (για τις ακολουθίες $f \circ s$ και $f \circ j$), $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(s_k) \leqslant 0$ και $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(j_k) \geqslant 0$. Δηλαδή $f(x_0) = 0$. □


$s_k \to x_0$
$j_k \to x_0$

Θεώρημα (Των ενδιαμέσων τιμών)

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση συνεχής σε διάστημα $[a, b]$. Η f παίρνει κάθε ενδιάμεση τιμή $\eta \in [f(a), f(b)]$ (δηλαδή υπάρχει $x_\eta \in [a, b]$ ώστε $f(x_\eta) = \eta$).

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g_\eta(x) = f(x) - \eta$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano. $\square$

Θεώρημα (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση συνεχής σε διάστημα $[a, b]$. Τότε το $f([a, b])$ είναι κλειστό διάστημα, και κατά συνέπεια η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[a, b]$.

Απόδειξη: Από το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών μπορούμε να πούμε ότι το $f([a, b])$ είναι διάστημα, ενδεχομένως με άπειρα άκρα. Εάν η f παίρνει αυθαίρετα μεγάλες τιμές (αντίστοιχα για αρνητικές προς το $-\infty$), θα μπορούμε να εντοπίσουμε τα διαστήματα στα οποία παίρνει μεγάλες τιμές. Για παράδειγμα, μπορούμε να χωρίσουμε το διάστημα $[a, b]$ στη μέση και να αναρρωτηθούμε αν η f παίρνει μεγάλες τιμές στο πρώτο ή δεύτερο κομμάτι, και να συνεχίσουμε ανάλογα στο κομμάτι που η f παίρνει μεγάλες τιμές. Στο ≪όριο≫, καταλήγουμε ότι για κάποιο $x_0 \in [a, b]$ θα πρέπει να έχουμε $f(x_0) > M$ για κάθε $M > 0$, δηλαδή $f(x_0) = \infty$. Αυτό είναι αδύνατον, επομένως το διάστημα $f([a, b])$ δεν έχει άπειρα άκρα.

Δηλαδή, το $f([a,b])$ έχει τη μορφή (λ, Λ) ή $(\lambda, \Lambda]$ ή $[\lambda, \Lambda)$ ή $[\lambda, \Lambda]$. Θα δείξουμε εν τέλει ότι $f([a,b]) = [\lambda, \Lambda]$. Για ευκολία, θα δείξουμε ότι το Λ περιέχεται σαν άκρο, και η άλλη περίπτωση μπορεί να γίνει ανάλογα. Θεωρούμε για κάθε n έναν $x_n \in [a,b]$ ώστε $f(x_n) \in [\Lambda - 1/n, \Lambda]$. Κατασκευάζουμε λοιπόν ακολουθία x_n, κι έπειτα (από την παρατήρηση στη σελίδα 113) διαλέγουμε κάποιους από αυτούς -έστω τους $y_n = s_{k_n}$- ώστε k_n σύξουσα και $y_n \to \ell \in [a,b]$. Παρατηρούμε ότι:

$$f(y_n) = f(s_{k_n}) \in [\Lambda - 1/k_n, \Lambda]$$

οπότε, με όριο καθώς $n \to \infty$ (και άρα $k_n \to \infty$):

$$f(\ell) = \Lambda$$

$\square$

Παράδειγμα

- Κάθε πολυώνυμο τρίτου βαθμού έχει λύση. Δηλαδή, για κάθε $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1 = 0$, υπάρχει x_0 ώστε $p(x_0) = 0$. Πράγματι, ξέρουμε ότι:
$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \to \infty} p(x) = \infty$$
οπότε, για αρκετά μικρό a και για αρκετά μεγάλο b, $p(a) < 0$ και $p(b) > 0$. Από το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $p(x_0) = 0$.
- Ανάλογη διαδικασία μπορεί να γίνει για όλα τα πολυώνυμα περιττού βαθμού.
- Μάλιστα μπορούμε να πούμε το εξής: Εάν $p(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ είναι ένα πολυώνυμο περιττού βαθμού, τότε για κάθε $\eta \in \mathbb{R}$ υπάρχει x_η ώστε $p(x_\eta) = \eta$. Πράγματι, ξέρουμε ότι:
$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \to \infty} p(x) = \infty$$
οπότε, για αρκετά μικρό a και για αρκετά μεγάλο b, $p(a) < \eta$ και $p(b) > \eta$. Από το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών, υπάρχει $x_\eta \in (a, b)$ ώστε $p(x_\eta) = \eta$.

1. Αποδείξτε την πρόταση στη σελίδα 111.
2. Έστω $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 1$. Βρείτε διαστήματα I_1, I_2, I_3 με $I_k \cap I_\lambda = \emptyset$, $k \neq \lambda$ (δηλαδή που δεν τέμνονται) ώστε: Να υπάρχουν $x_1 \in I_1$, $x_2 \in I_2$, $x_3 \in I_3$ με $f(x_k) = 0$.
3. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση με:
$$f^2(x) - x^2 - 1 = 0$$
Δείξτε ότι η f είναι πάντοτε θετική ή πάντοτε αρνητική.
4. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση το γράφημα της οποίας περιέχεται σε τετράγωνο πλευράς $b - a$ με πλευρές παράλληλες στους άξονες. Δείξτε ότι η C_f τέμνει και τις δύο διαγωνίους του τετραγώνου.
5. Δείξτε ότι κάθε πολυώνυμο ζυγού βαθμού $p(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ έχει ελάχιστο. Δηλαδή, υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε:
$$p(x_0) = \min p(\mathbb{R}), \text{ ή αλλιώς } p(x_0) \leqslant p(x) \text{ για όλα τα } x$$