ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

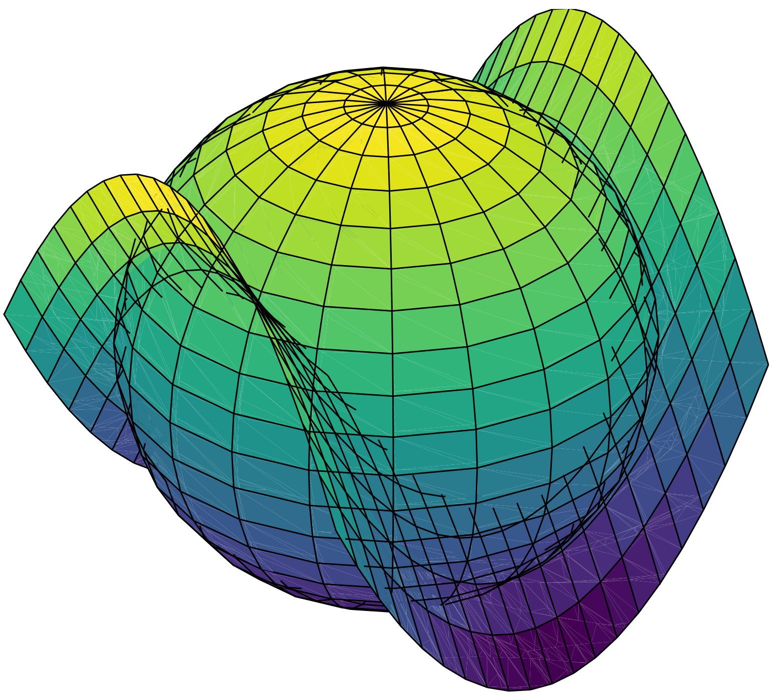
Μερικές Αποδείξεις

Προπτυχιακή Εργασία || 2020-2021

Τμήμα Μαθηματικών

Χρήστος Τόλης, 3^{o} εξάμηνο
Αθανάσιος Παβέλης, 3^{o} εξάμηνο
Αναστάσιος Φράγκος, 3^{o} εξάμηνο

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: κ. Λεώνη Ευαγγελάτου Δάλλα



07/01/2021

Περιεχόμενα

Συμβολισμοί:

1. $\mathbb{N}$: Το σύνολο των φυσικών για εμάς θα ξεκινά από το 1: $\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$
2. $||\vec{a}||$: Είναι η Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος $\vec{a}$.
3. $[n]$: Είναι το σύνολο $[1, n] \cap \mathbb{N}$.
4. $\bigcirc_{i\in[n]} k_i$: Έτσι θα συμβολίζουμε την σύνθεση: $k_n \circ k_{n-1} \circ \cdots \circ k_2 \circ k_1$
5. $B - A$: Είναι το σύνολο $B \backslash A$.
6. A_B^c: Είναι το συμπλήρωμα του $A \subseteq B$ στο B. Δηλαδή το $B - A$.
7. $[\vec{a}, \vec{b}]$: Είναι το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ του πέρατος του $\vec{a}$ και του πέρατος του $\vec{b}$.
8. $\widehat{a}$: Είναι το μοναδιαίο διάνυσμα $\dfrac{\vec{a}}{||\vec{a}||}$.
9. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{x}}\right|_{\vec{a}}$: Είναι η μερική παράγωγος $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{a})$.
10. $\nabla f\big|_{\vec{a}}$: Είναι το ανάδελτα της f στο $\vec{a}$.
11. $\mathcal{L}(\gamma)$: Είναι το μήκος της καμπύλης γ.
12. $\mathcal{A}(\Theta)$: Είναι το παράπλευρο εμβαδόν της επιφάνειας Θ.
13. $\varepsilon \wedge \zeta$: Είναι το σημείο τομής των ευθειών ε και ζ.
14. $a \vee b$: Είναι η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία a και b.
15. $\vec{v} \parallel \gamma$: Υπάρχει εφαπτομένη της καμπύλης γ στην οποία το διάνυσμα $\vec{v}$ είναι παράλληλο.
16. $\big(a(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \sqsubseteq \mathbb{A}$: Το σύνολο $\{a(n) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{A}$.
17. $A, \widehat{\Gamma\Delta}$: Είναι ο κώνος με βάση τον κυκλικό δίσκο διαμέτρου $\Gamma\Delta$ και κορυφή το σημείο A.

Παρατηρήσεις και Σχόλια:

Οι αποδείξεις αυτής της εργασίας είναι σε μεγάλο βαθμό επινοήσεις των συγγραφέων. Όσες από αυτές δεν είναι δημιούργημά μας, έχουν παρθεί από μία τουλάχιστον από τις παρακάτω πηγές:

Τηλέμαχος Χατζηαφράτης: "ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΕ ΠΟΛΛΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ", Εκδόσεις 'ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ', Αθήνα, 2009

Λεώνη Ευαγγελάτου Δάλλα: "Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ", Δακτυλογραφημένες σημειώσεις του Τμ. Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α., 2015-2016

Όλα τα σχήματα αυτής της εργασίας είναι δημιούργημα των συγγραφέων. Χρησιμοποιήθηκαν για την δημιουργία τους τα λογισμικά:

GNU − octave: John W. Eaton, 1996-2020

Geogebra Geometry: International Geogebra Institute, 2020

Η δακτυλογράφιση έγινε με χρήση του λογισμικού LaTeX: The LaTeX project, 2019-2020.

Οι συγγραφείς

Ακολουθίες στον $\mathbb{R}^m$

1.1 Γενικά

Αντίστοιχα με τις ακολουθίες των πραγματικών αριθμών, θα ορίσουμε, ουσιαστικά ως γενίκευση, ακολουθίες στον $\mathbb{R}^m$, όπου $m \in \mathbb{N}$. Η γενίκευση αυτή θα γίνει αντιστοιχίζοντας αυτήν την φορά τους φυσικούς αριθμούς σε διανύσματα πραγματικών συντεταγμένων.

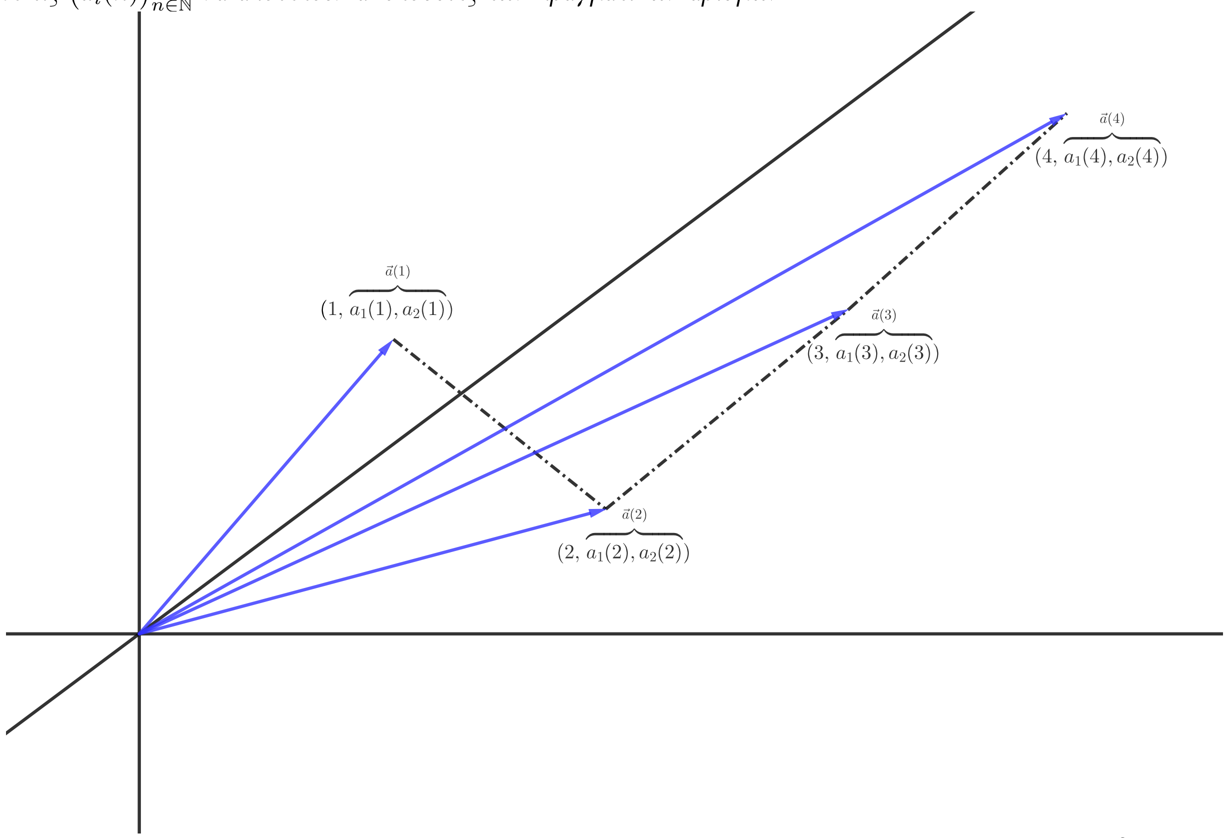
Ορισμός: Ακολουθίες του $\mathbb{R}^m$:
Ονομάζουμε ακολουθία του $\mathbb{R}^m$ κάθε συνάρτηση $\vec{a}$ της μορφής:

$$\vec{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^m, \ \text{με } m \in \mathbb{N}$$

όπου:

$$\vec{a}(n) = \big(a_1(n), a_2(n), \cdots, a_m(n)\big)$$

με τις $\big(a_i(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ να αποτελούν ακολουθίες των πραγματικών αριθμών.



Παραπάνω εικονίζεται η μορφή μίας ακολουθίας (στις 4 πρώτες τιμές της) του τύπου $\vec{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$

Επίσης θα ορίσουμε τις υπακολουθίες στον $\mathbb{R}^m$, με σκεπτικό παρόμοιο με τις υπακολουθίες στον $\mathbb{R}$. Συγκεκριμένα, όπως στον $\mathbb{R}$ ορίζαμε ως υπακολουθία της ακολουθίας a την ακολουθία αυτή που διέθετε (κάποιες) τιμές της a, με την σειρά που εμφανίζονταν στην a, στον $\mathbb{R}^m$ ορίζουμε ως υπακολουθία της ακολουθίας $\vec{a}$ την ακολουθία αυτή που έχει ως τιμές (κάποιες) τιμές - διανύσματα της $\vec{a}$, με την σειρά που εμφανίζονται στην $\vec{a}$.

Ορισμός: Υπακολουθίες του $\mathbb{R}^m$:
Έστω $\vec{a}$ μια ακολουθία του $\mathbb{R}^m$ και k μία ακολουθία της μορφής $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Κάθε ακολουθία της μορφής $\vec{a} \circ k$ θα ονομάζεται υπακολουθία της $\vec{a}$.

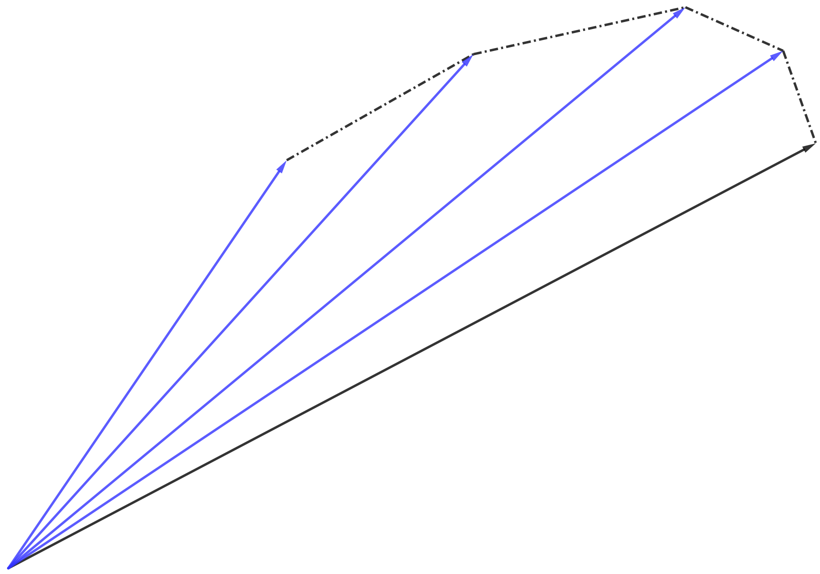
Μία οικογένεια ακολουθιών που αξίζει επίσης να αναφερθεί είναι οι επεκτάσεις των ακολουθιών *Cauchy* στον χώρο $\mathbb{R}^m$. Με τον παρακάτω ορισμό γίνεται εμφανές ότι αυτός δεν είναι τίποτε αλλο παρά μία επέκταση του αντίστοιχου ορισμού των ακολουθιών *Cauchy* του $\mathbb{R}$· δηλαδή όπως στις πραγματικές ακολουθίες *Cauchy* αναμέναμε για κάθε 'μικρό' διάστημα (μήκους ε) να μπορούμε να βρούμε κάποιον 'μεγάλο' αριθμό (δ) έτσι ώστε οι διαφορές των τιμών της ακολουθίας μετά του δ να συσσορεύονται σε αυτό το μικρό διάστημα, εδώ θα πρέπει να αναμένουμε για κάθε 'μικρή' ακτίνα (ε) να μπορούμε να βρούμε κάποιον 'μεγάλο' αριθμό (δ) έτσι ώστε οι διαφορές των τιμών - διανυσμάτων της ακολουθίας μετά του δ να συσσορεύονται σε μία σφαίρα ακτίνας ε.

Ορισμός: Ακολουθίες *Cauchy* στον $\mathbb{R}^m$:
Μία ακολουθία $\vec{a}$ λέγεται Cauchy εάν

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall n, h > \delta : \ ||\vec{a}(n) - \vec{a}(h)|| < \varepsilon$$

1.2 Σύγκλιση

Στις ακολουθίες των πραγματικών αριθμών λέγαμε ότι μια ακολουθία συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό όταν οι τιμές τις σε σημεία που καθώς πλησίαζαν το άπειρο, προσέγγιζαν 'όλο και καλύτερα' μια πραγματική τιμή, την οποία ονομάζαμε και 'όριο της ακολουθίας (στο άπειρο)'. Κατ΄αναλογία εδώ αναμένουμε οι τιμές της



ακολουθίας σε σημεία που πλησιάζουν το άπειρο, αυτήν την φορά να 'προσεγγίζουν' ένα διάνυσμα του χώρου $\mathbb{R}^m$. Ισοδύναμα, θα θέλαμε το διάνυσμα της διαφοράς του 'οριακού' διανύσματος με τις τιμές της ακολουθίας να έχει μέτρο που προσεγγίζει το 0. Με αυτά υπ΄ όψιν, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός: Σύγκλιση στον $\mathbb{R}^m$:
Έστω $\vec{a}$ μια ακολουθία του $\mathbb{R}^m$ και $\vec{r}$ ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$. Θα λέμε ότι η $\vec{a}$ συγκλίνει στο διάνυσμα $\vec{r}$ εάν συμβαίνει:

$$||\vec{a}(n) - \vec{r}|| \to 0, \text{ όταν } n \to \infty$$

Εάν τώρα ισοδύναμα παραστήσουμε την $\vec{a}$ ως $\vec{a} = \big(a_1, a_2, \cdots, a_m\big)$ και το $\vec{r}$ ως $\vec{r} = \big(r_1, r_2, \cdots, r_m\big)$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η σύγκλιση που αναφέραμε ισοδυναμεί με σύγκλιση κατά συντεταγμένες. Δηλαδή $\alpha_i(n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} r_i$

Πόρισμα: Σύγκλιση κατά συντεταγμένες:
Έστω $\vec{a}$ μια ακολουθία του $\mathbb{R}^m$ και $\vec{r}$ ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$. Εάν η $\vec{a} = \big(a_1, a_2, \cdots, a_m\big)$ συγκλίνει στο διάνυσμα $\vec{r} = \big(r_1, r_2, \cdots, r_m\big)$, τότε:

$$\forall i \in [m], a_i(n) \to r_i, \text{ καθώς } n \to \infty$$

Σημειωτέον, οι $\big(a_i(n)\big)_{n\in\mathbb{R}}$ είναι ακολουθίες των πραγματικών.

Πράγματι, εάν $\vec{a}$ συγκλίνει στο $\vec{r}$, τότε:

$$||\vec{a}(n) - \vec{r}||^2 = \big(a_1(n) - r_1\big)^2 + \big(a_2(n) - r_2\big)^2 + \cdots + \big(a_m(n) - r_m\big)^2 \to 0$$

Εάν τώρα για κάθε $A = \mathbb{N} \cap [n, \infty) \subseteq \mathbb{N}$ υπάρχει μια a_i τέτοια ώστε $|a_i(n) - r_i| > \delta$ για κάποιο $\delta > 0$, επειδή στο προηγούμενο άθροισμα πραγματευόμαστε με αθροίσμα τετραγώνων (τα οποία είναι θετικά), θα πρέπει να ισχύει:

$$||\vec{a}(n) - \vec{r}||^2 > 0 + 0 + \cdots + \delta^2 + \cdots + 0 + 0 = \delta^2$$

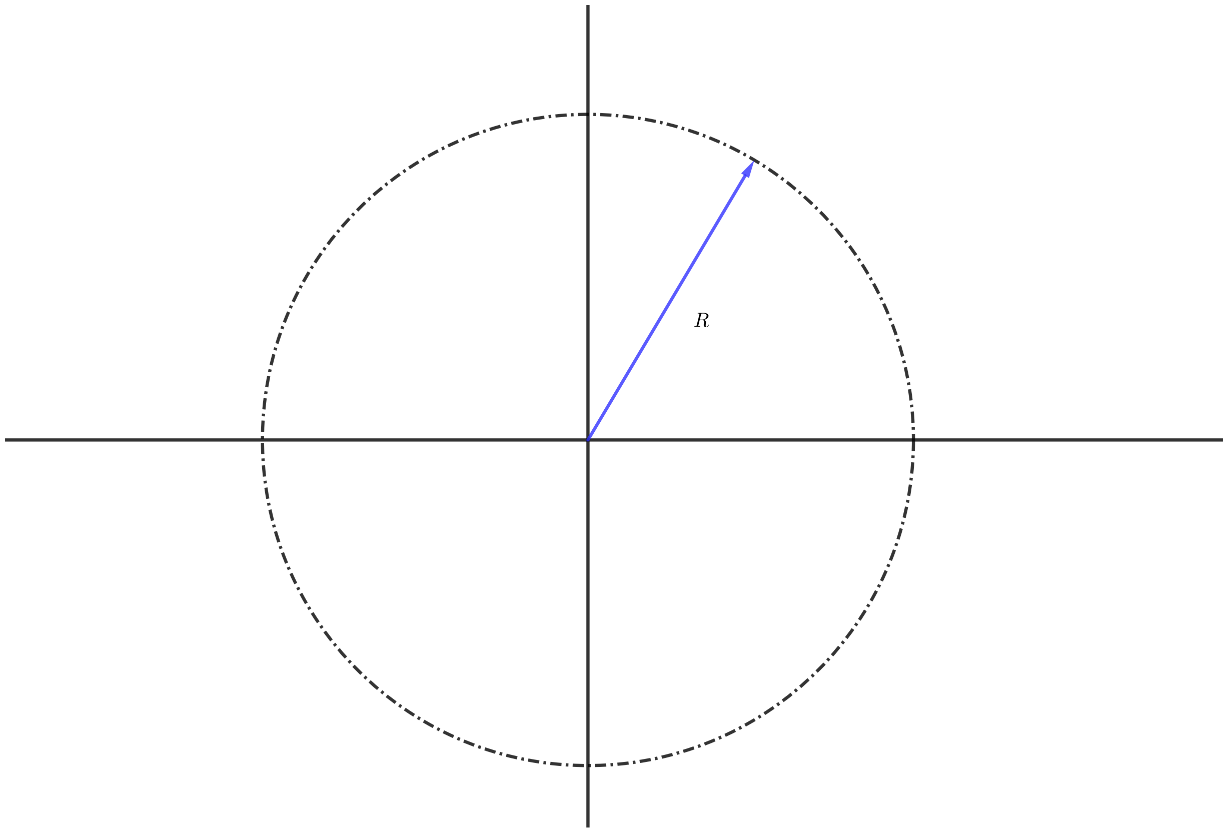
για κάποιο σταθερό δ. Προφανώς, αυτό άρει την υπόθεσή μας ότι η $\vec{a}$ συγκλίνει στο $\vec{r}$, επομένως θα πρέπει $\forall i \in [m], a_i(n) - r_i \to 0 \Rightarrow a_i(n) \to r_i$, το οποίο είναι το ζητούμενο αποτέλεσμα. Να σημειωθεί ότι ισχύει και το αντίστροφο αποτέλεσμα, μιας και αν $\forall i \in [m], a_i(n) \to r_i$ έχουμε άμεσα ότι $\vec{a}(n) \to \big(r_1, r_2, \cdots, r_m\big)$, δηλαδή $\vec{a}(n) \to \vec{r}$.

Λήμμα: Συγκλίνουσες υπακολουθίες των φραγμένων ακολουθιών:
Έστω $\vec{a}$ μια ακολουθία του $\mathbb{R}^m$ και $R > 0$. Εάν η $\vec{a}$ φράσεται από το R, δηλαδή:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ ||\vec{a}(n)|| < R$$

τότε η $\vec{a}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Επειδή $\forall n \in \mathbb{N}, ||\vec{a}(n)|| < R$, όλα τα διανύσματα της $\vec{a} = \big(a_1, a_2, \cdots, a_m\big)$ έχουν μέτρο μικρότερο του R και, συνεπώς, βρίσκονται περιορισμένα εντός μιας σφαίρας, γενικά m διαστάσεων.



Οπότε κάθε συντεταγμένη της $\vec{a}$ θα είναι κάτω φραγμένη από το $-R$ και άνω φραγμένη από το R. Επειδή οι συντεταγμένες αποτελούν ακολουθίες των πραγματικών αριθμών, από το Θεώρημα $Bolzano-Weierstrauss$, θα έχουν συγκλίνουσες υπακολουθίες που θα συγκλίνουν σε πραγματικούς αριθμούς. Συγκεκριμένα, θα υπάρχει αύξουσα $k_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $a_1 \circ k_1$ να συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό r_1. Για την νέα τώρα συνάρτηση $\vec{a} \circ k_1$, μπορεί να εφαρμοστεί παρόμοιο επιχείρημα, αφού κι αυτή είναι φραγμένη ως υπακολουθία της $\vec{a}$. Οπότε είναι δυνατόν να βρεθεί αύξουσα $k_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $a_2 \circ k_1 \circ k_2$ να συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό r_2. Είναι εμφανές ότι εάν συνεχίσουμε αναλόγως, είναι δυνατόν να βρούμε αύξουσες $k_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, i \in [m]$ τέτοιες ώστε οι:

$$a_i \bigcirc_{s \in [i]} k_{i-s+1}$$

να συγκλίνουν σε πραγματικούς αριθμούς r_i. Εάν συμβαίνει αυτό, τότε κάθε ακολουθία:

$$a_i \bigcirc_{s \in [m]} k_{m-s+1}$$

συγκλίνει στο αντίστοιχο r_i, μιάς και ισχύει ότι $\Big(a_i \bigcirc_{s \in [m]} k_{m-s+1}(n)\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $\Big(a_i \bigcirc_{s \in [i]} k_{i-s+1}(n)\Big)_{n \in \mathbb{N}}$
Από το προηγούμενο πόρισμα, εάν $\vec{r} = \big(r_1, r_2, \cdots r_m\big)$, τότε η $\vec{a} \circ k(n)$ με $k = k_1 \circ k_2 \circ \cdots \circ k_m$ συγκλίνει στο $\vec{r}$.

Πόρισμα: Σύγκλιση των ακολουθιών $Cauchy$ στον $\mathbb{R}^m$:
Κάθε ακολουθία $Cauchy$ του $\mathbb{R}^m$ συγκλίνει.

Επειδή η ακολουθία είναι $Cauchy$, ισχύει ότι: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall n, h > \delta :\ ||\vec{a}(n) - \vec{a}(h)|| < \varepsilon$. Οπότε αν διαλέξουμε κάποιο $h_0 \in \mathbb{N}$, για το οποίο ισχύει το παρακάτω:

$$\text{Για } \varepsilon = 1, \exists \delta > 0 : \forall n, h_0 > \delta : ||\vec{a}(n) - \vec{a}(h_0)|| < 1$$

και λαμβάνοντας επίσης την ανισότητα $||\vec{a}(n)|| - ||\vec{a}(h_0)|| \leq ||\vec{a}(n) - \vec{a}(h_0)||$ υπ' όψιν, μπορούμε να γράψουμε την προηγούμενη σχέση ως εξής:

$$\text{Για } \varepsilon = 1, \exists\delta > 0 : \forall n > \delta : ||\vec{a}(n)|| - ||\vec{a}(h_0)|| \leq ||\vec{a}(n) - \vec{a}(h_0)|| < 1$$

$$\Rightarrow ||\vec{a}(n)|| < 1 + ||\vec{a}(h_0)||, \ \text{για } n > \delta$$

Δηλαδή προκύπτει ότι άνω του δ η $\vec{a}$ είναι τελικά φραγμένη, άρα και ολικά φραγμένη. Λαμβάνοντας το προηγούμενο λήμμα υπ' όψιν, η $\vec{a}$ θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $\vec{a} \circ k$, που συγκλίνει στο $\vec{r}$. Ας υποθέσουμε ότι $\vec{a} \circ l$ είναι μία άλλη υπακολουθία της $\vec{a}$. Επειδή $\vec{a}$ είναι $Cauchy$, ισχύει το ακόλουθο:

$$\text{Για τυχόν } \varepsilon > 0, \exists\hat{\delta} > 0 : \forall k(n), l(n) > \hat{\delta} : ||\vec{a} \circ l(n) - \vec{a} \circ k(n)|| < \varepsilon$$

(*Μπορεί να βρεθεί* $n : k(n), l(n) > \hat{\delta}$ *αφού* k, l *γνησίως αύξουσες με τιμές στους φυσικούς*)

Επειδή η $\vec{a} \circ k$ είναι συγκλίνουσα, επίσης το επόμενο ισχύει:

$$\text{Για το προηγούμενο } \varepsilon > 0, \exists\bar{\delta} > 0 : k(n) > \bar{\delta} : ||\vec{a} \circ k(n) - \vec{r}|| < \varepsilon$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο τελευταίες σχέσεις αληθεύουν ταυτόχρονα για τιμές μεγαλύτερες του $s = max\{\hat{\delta}, \bar{\delta}\}$. Οπότε προσθέτοντάς τες καταλήγουμε στο:

$$||\vec{a} \circ l(n) - \vec{a} \circ k(n)|| + ||\vec{a} \circ k(n) - \vec{r}|| < 2\varepsilon$$

Με χρήση της τριγωνικής ανισότητας $||\vec{a} \circ l(n) - \vec{a} \circ k(n) + \vec{a} \circ k(n) - \vec{r}|| \leq ||\vec{a} \circ l(n) - \vec{a} \circ k(n)|| + ||\vec{a} \circ k(n) - \vec{r}||$ παίρνουμε:

$$||\vec{a} \circ l(n) - \vec{a} \circ k(n) + \vec{a} \circ k(n) - \vec{r}|| < 2\varepsilon \Rightarrow ||\vec{a} \circ l(n) - \vec{r}|| < 2\varepsilon$$

Δηλαδή η $\vec{a} \circ l$ συγκλίνει στο $\vec{r}$ για κάθε υπακολουθία $\vec{a} \circ l$. Από αυτό προκύπτει το ζητούμενο, αφού εάν $l_1 = 2n - 1$ και $l_2 = 2n$, τότε η $\vec{a}$ συγκλίνει και από τα περιττά και από τα άρτια στο $\vec{r}$. Δηλαδή συγκλίνει στο $\vec{r}$ από όλο το $\mathbb{N}$.

Στοιχεία Τοπολογίας

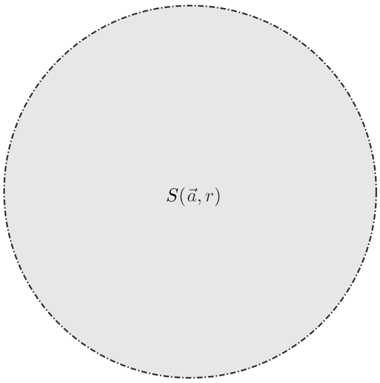
Για την ορθή μελέτη των συναρτήσεων του $\mathbb{R}$, είναι αναγκαίο να αφιερώσουμε ένα τουλάχιστον κομμάτι αυτής της εργασίας στην μελέτη μερικών χρήσιμων για τις ανάγκες μας συνόλων του $\mathbb{R}^m$. Εξάλλου, συναρτήσεις δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια σχέση αντιστοιχίας των στοιχείων ενός συνόλου σε στοιχεία ενός άλλου συνόλου.

Ορισμός: Ανοικτές και Κλειστές σφαίρες στον $\mathbb{R}^m$:
1. Ανοικτές σφαίρες: Θα ονομάζουμε ανοικτή σφαίρα κέντρου $\vec{a}$ και ακτίνας r το σύνολο:

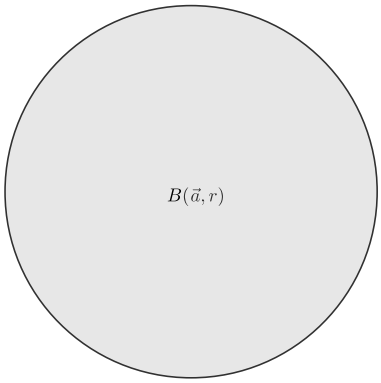
$$S(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \ ||\vec{x} - \vec{a}|| < r\}$$

2. Κλειστές σφαίρες: Θα ονομάζουμε κλειστή σφαίρα κέντρου $\vec{a}$ και ακτίνας r το σύνολο:

$$B(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \ ||\vec{x} - \vec{a}|| \leq r\}$$



(α′) *Μία ανοικτή σφαίρα στον* $\mathbb{R}^2$



(β′) *Μία κλειστή σφαίρα στον* $\mathbb{R}^2$

Ορισμός: Ανοικτά και Κλειστά σύνολα:
1. Ανοικτά σύνολα: Θα ονομάζουμε ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοικτό όταν για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε η σφαίρα $S(\vec{x}, r)$ να περιέχεται στο A.
2. Κλειστά σύνολα: Θα ονομάζουμε ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^m$ κλειστό εάν το $A^c_{\mathbb{R}^m}$ είναι ανοικτό.

Ορισμός: Φραγμένα σύνολα:
Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^m$ θα ονομάζεται φραγμένο εάν υπάρχει μία σφαίρα $S(\vec{a}, r)$ που να το περιέχει. Δηλαδή:

$$A \text{ φραγμένο } \Leftrightarrow \exists S(\vec{a}, r) : A \subseteq S(\vec{a}, r)$$

Ορισμός: Εσωτερικό συνόλου:
Καταρχάς, ένα σημείο $\vec{x}$ του $A \subseteq \mathbb{R}^m$ θα λέγεται εσωτερικό του A εάν υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε η $S(\vec{x}, r)$ να περιέχεται στο A. Τώρα το σύνολο:

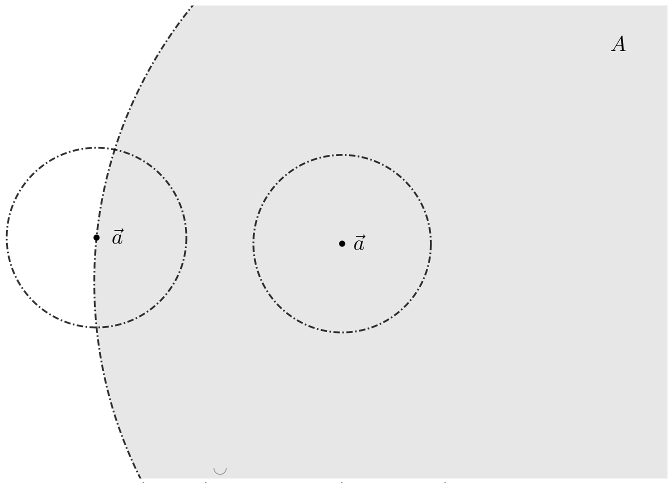
$$A^\circ = \{\vec{x} \in A : \vec{x} \text{ εσωτερικό του } A\}$$

ονομάζεται εσωτερικό του A.

Ορισμός: Σύνολο σημείων συσσώρευσης:
Καταρχάς, ένα σημείο $\vec{x}$ του $A \subseteq \mathbb{R}^m$ θα λέγεται σημείο συσσώρευσης του A εάν όλες οι τριγύρω περιοχές του έχουν σημεία στο A. Δηλαδή, για κάθε ακτίνα $r > 0$ ισχύει $\big(S(\vec{x}, r) - \{\vec{x}\}\big) \cap A \neq \emptyset$. Τώρα το σύνολο:

$$A' = \{\vec{x} \in A : \vec{x} \text{ σημείο συσσώρευσης του } A\}$$

ονομάζεται σύνολο σημείων συσσώρευσης του A. Να σημειωθεί ότι εάν ένα σημείο του A δεν είναι συσσώρευσης, το ονομάζουμε μεμονωμένο.

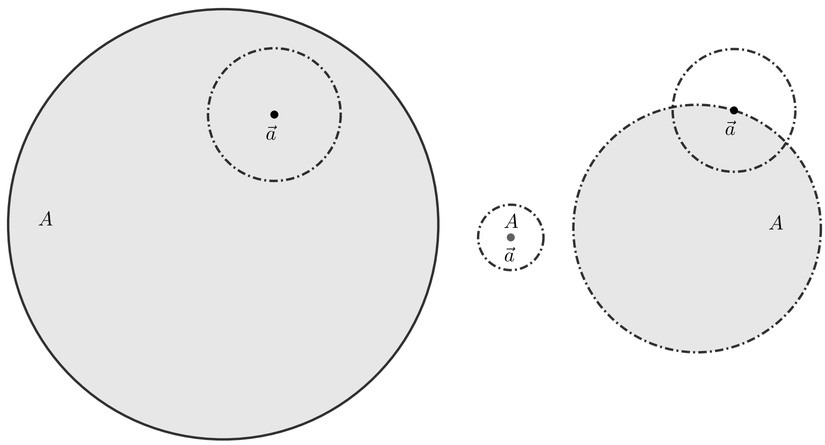


Μία περίπτωση σημείων συσσώρευσης.

Ορισμός: Σύνολο σημείων επαφής:
Καταρχάς, ένα σημείο $\vec{x}$ του $A \subseteq \mathbb{R}^m$ θα λέγεται σημείο επαφής του A εάν για κάθε ακτίνα $r > 0$ ισχύει $S(\vec{x}, r) \cap A \neq \emptyset$. Τώρα το σύνολο:

$$\bar{A} = \{\vec{x} \in A : \vec{x} \text{ σημείο επαφής του } A\}$$

ονομάζεται σύνολο σημείων επαφής του A.



Μία περίπτωση σημείων επαφής.

Ορισμός: Σύνορο συνόλου:
Καταρχάς, ένα σημείο $\vec{x}$ του $A \subseteq \mathbb{R}^m$ θα λέγεται συνοριακό του A εάν για κάθε ακτίνα $r > 0$ η σφαίρα $S(\vec{x}, r)$ τέμνει το A και το $A^c_{\mathbb{R}^m}$. Τώρα το σύνολο:

$$\partial A = \{\vec{x} \in A : \vec{x} \text{ συνοριακό του } A\}$$

ονομάζεται σύνορο του A.

Έχοντας τώρα πει τους ορισμούς αυτούς, μπορούμε να αρχίσουμε να αποδεικνύουμε ορισμένες ιδιότητες αυτών των συνόλων. Συγκεκριμένα, θα δούμε τα εξής:

> **Πόρισμα:** Τα σημεία επαφής σε κλειστό σύνολο:
> *Σε κάθε κλειστό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ισχύει ότι $A = \bar{A}$. Ισχύει και το αντίστροφο· δηλαδή εάν $A = \bar{A}$ τότε το A είναι κλειστό.*

Πράγματι, ας υποθέσουμε ένα $a \in A'$ και $a \notin A$· δηλαδή να είναι σημείο συσσώρευσης, αλλά όχι στο A. Επειδή το A είναι κλειστό, το συμπλήρωμά του $A^c_{\mathbb{R}^m}$ θα είναι ανοικτό. Δηλαδή, για το προηγούμενο a:

$$\exists r > 0 : S(a,r) \subseteq A^c_{\mathbb{R}^m}$$

αυτό όμως άρει την υπόθεση ότι το a είναι σημείο συσσώρευσης, δηλαδή ότι $a \in A'$. Άρα θα πρέπει $a \in A$ και ισοδύναμα:

$$\forall a \in A', a \in A$$

δηλαδή $A' \subseteq A$.

Εδώ επίσης αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το σύνολο $\bar{A}$ μπορεί να κατασκευαστεί ως $A \cup A'$. Αυτό διότι κάθε στοιχείο a για το οποίο συμβαίνει $\forall r > 0 : S(a,r) \cap A \neq \emptyset$, μπορεί να είναι είτε εντός του συνόλου A, είτε εκτός του· εάν είναι εντός του, $a \in A$, εάν είναι εκτός του, θα είναι σημείο συσσώρευσης, οπότε $a \in A' \rightarrow \bar{A} \subseteq A \cup A'$. Είναι σχετικά εμφανές ότι κάθε στοιχείο a του $A \cup A'$ ανήκει στο $\bar{A}$ διότι αν ανήκει στο A, $\forall r > 0 : S(a,r) \cap A \supseteq \{a\} \neq \emptyset$ και αν ανήκει στο A', εξ ορισμού $\forall r > 0 : \big(S(a,r) - \{a\}\big) \cap A \neq \emptyset \rightarrow \bar{A} \supseteq A \cup A' \rightarrow \bar{A} = A \cup A'$.

Συνεπώς, επειδή $A' \subseteq A$ έχουμε $\bar{A} = A$.

Για το αντίστροφο, αρκεί να δείξουμε ότι $A^c_{\mathbb{R}^m}$ ανοικτό. Εάν $\bar{A} = A$, τότε για κάθε σημείο a εκτός του A ισχύει:

$$\exists r > 0 : S(a,r) \cap A = \emptyset \Rightarrow S(a,r) \subseteq A^c_{\mathbb{R}^m}$$

Άρα το $A^c_{\mathbb{R}^m}$ ανοικτό.

> **Πόρισμα:** Χαρακτηρισμός των Κλειστών συνόλων μέσω ακολουθιών:
> *Εάν ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό, τότε κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $\big(a(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \sqsubseteq A$ συγκλίνει σε στοιχείο $a \in A$. Ισχύει και το αντίστροφο.*

Εδώ επειδή $a(n) \rightarrow a$ $\big($ η $\big(a(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα $\big)$, ισχύει ότι:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall n > \delta : ||a(n) - a|| < \varepsilon \Rightarrow a(n) \in S(a,\varepsilon)$$

Επειδή $\big(a(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \sqsubseteq A$ έχουμε $a(n) \in A$ και συνεπώς:

$$\forall \varepsilon > 0, S(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

Δηλαδή $a \in \bar{A}$. Από το προηγούμενο πόρισμα, επειδή A κλειστό, $\bar{A} = A$, οπότε $a \in A$.

Για το αντίστροφο, θα μελετήσουμε το σύνολο A'. Εάν $A' = \emptyset$, άμεσα προκύπτει από την σχέση $\bar{A} = A \cup A'$ ότι $\bar{A} = A$ και από το προηγούμενο πόρισμα, ότι το A είναι κλειστό. Έστω λοιπόν $A' \neq \emptyset$ και επίσης ένα $a \in A'$· θα ισχύει ότι:

$$\forall r > 0, \big(S(a,r) - \{a\}\big) \cap A \neq \emptyset$$

Οπότε, μπορεί να βρεθεί γνησίως φθίνουσα ακολουθία $r(i) \rightarrow 0^+$ τέτοια ώστε η σφαίρες $S(a, r(i))$ να έχουν στοιχείο του A. Μπορούμε να κατασκευάσουμε λοιπόν ακολουθία $\big(a(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία παίρνει κάθε τιμή της $a(i)$ από μία $S(a, r(i)) \cap A$. Προφανώς, καθώς $r(i) \rightarrow 0$, $a(n) \rightarrow a$, οπότε, από την υπόθεσή μας, θα πρέπει $a \in A$. Επειδή αρχικά υποθέσαμε ότι $a \in A'$, προκύπτει $A' \subseteq A$. Από την σχέση τώρα $\bar{A} = A \cup A'$, έχουμε $\bar{A} = A$ και από το προηγούμενο πόρισμα, το A είναι κλειστό.

> **Θεώρημα:** Εγκυβωτισμός συνόλων:
> *Έστω $\big(A(i)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία μη κενών, κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^m$ που υπόκειται στην φθίνουσα σχέση $A(i+1) \subseteq A(i)$. Τότε ισχύει:*
>
> $$\bigcap_{i=1}^{\infty} A(i) \neq \emptyset$$

Πράγματι, επειδή τα $A(i)$ μη κενά, θα υπάρχει μία ακολουθία των στοιχείων των $A(i)$ που θα έχει την μορφή

$a(i) \in A(i)$. Επειδή $A(1)$ φραγμένο, υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία $a \circ k(i)$ που συγκλίνει στο a. Από το προηγούμενο πόρισμα, επειδή $A(i)$ κλειστά, το a ανήκει σε καθένα από τα $A(i)$, μιάς και η ακολουθία από κατασκευή της έχει τελικό τμήμα σε κάθε ένα από τα $A(i)$. Δηλαδή:

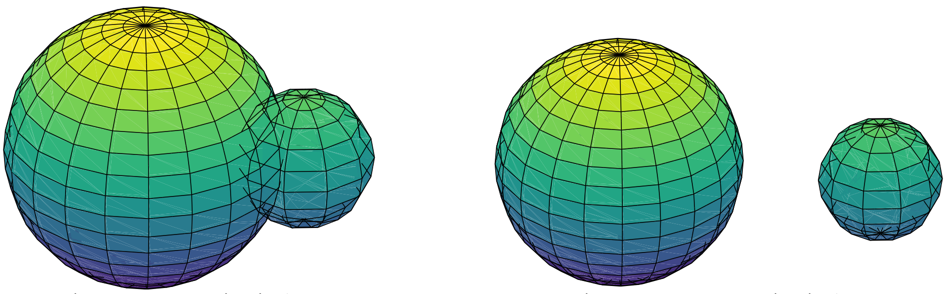
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A(i) \supseteq \{a\} \neq \emptyset$$

οπότε το ζητούμενο απεδείχθη.

Θα συνεχίσουμε με ακόμη λίγους (όχι ως προς το περιεχόμενο) ορισμούς.

Ορισμός: Συνεκτικά σύνολα:
Ένα σύνολο A θα ονομάζεται συνεκτικό εάν:

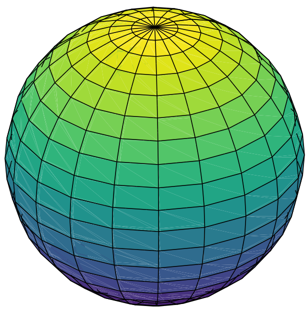
$$\nexists B, C \neq \emptyset \text{ σύνολα } : A = B \cup C \text{ και } B \cap C = \emptyset$$



Ένα συνεκτικό σύνολο. *Ένα μη συνεκτικό σύνολο.*

Ορισμός: Κυρτά σύνολα:
Ένα σύνολο A θα ονομάζεται κυρτό εάν:

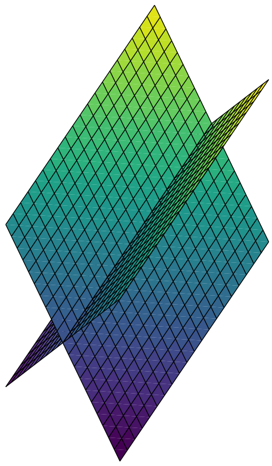
$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in A, [\vec{a}, \vec{b}] \subseteq A$$



Ένα κυρτό σύνολο (γεμάτη σφαίρα).

Ορισμός: Πολυγωνικά συνεκτικά σύνολα:
Ένα σύνολο A θα ονομάζεται πολυγωνικά συνεκτικό εάν:

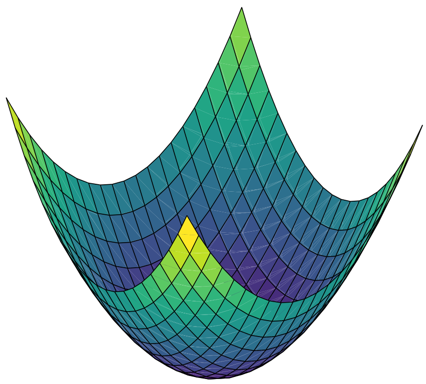
$$\forall \vec{a} = \vec{x}_1, \vec{b} = \vec{x}_{k+1} \in A,\ \exists \bigcup_{i \in [k]} [\vec{x}_i, \vec{x}_{i+1}] \subseteq A,\ \text{για κάποιο } k \in \mathbb{N}$$



Ένα πολυγωνικά συνεκτικό σύνολο.

Ορισμός: Κατά τόξα συνεκτικά σύνολα:
Ένα σύνολο A θα ονομάζεται κατά τόξα συνεκτικό εάν:

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in A, \exists \text{ συνεχής καμπύλη } \gamma \text{ του } A : \gamma(\vec{a}) = \vec{a}, \gamma(\vec{b}) = \vec{b}$$



Ένα κατά τόξα συνεκτικό σύνολο.

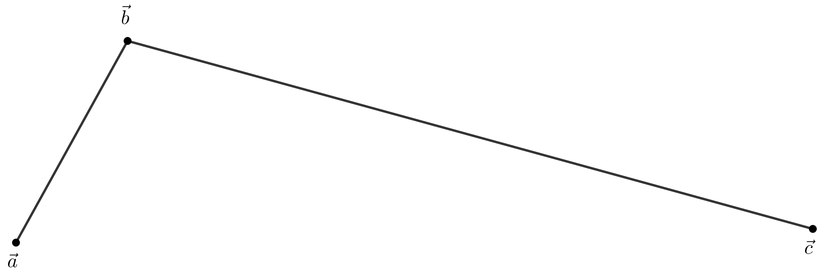
Παρατήρηση: Σχέσεις μεταξύ κυρτών, πολυγωνικών και κατά τόξα συνεκτικών συνόλων:
Εάν ένα σύνολο A είναι κυρτό, τότε είναι πολυγωνικά συνεκτικό. Εάν είναι πολυγωνικά συνεκτικό, τότε είναι κατά τόξα συνεκτικό.

Για το κυρτό $\rightarrow$ πολυγωνικά συνεκτικό: Προφανώς, αν $\vec{a}, \vec{b} \in A$, τότε το $[\vec{a}, \vec{b}]$ είναι πολυγωνική γραμμή που περιέχεται στο A.

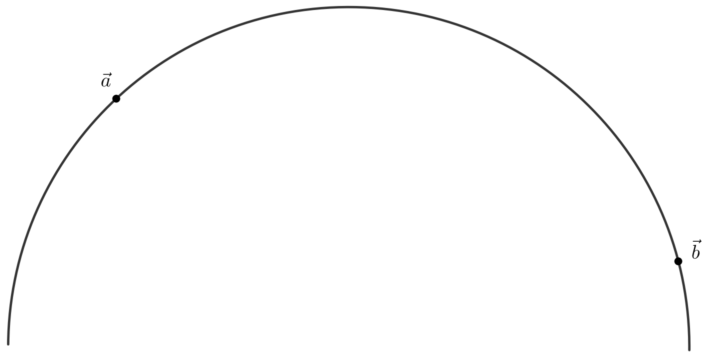
Για πολυγωνικά συνεκτικό $\rightarrow$ κατά τόξα συνεκτικό: Προφανώς, αν $\vec{a} = \vec{a}_1, \vec{b} = \vec{b}_k \in A$, τότε η πολυγωνική γραμμή $\bigcup_{i \in [k]} [\vec{a}_i, \vec{b}_i]$ είναι καμπύλη που περιέχεται στο A.

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι τα αντίστροφα δεν ισχύουν πάντα, παρά μόνο στον $\mathbb{R}$. Πράγματι, από τον $\mathbb{R}^2$ μόλις μπορούμε να βρούμε αντιπαραδείγματα:

Για την πρώτη αντίστροφη ισοδυναμία: Θεωρούμε 3 σημεία $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ μη συγγραμικά και το σύνολο $A = [\vec{a}, \vec{b}] \cup [\vec{b}, \vec{c}]$. Το A είναι πολυγωνικά συνεκτικό αλλά όχι κυρτό, αφού $[\vec{a}, \vec{c}] \not\subseteq A$.



Για την δεύτερη αντίστροφη ισοδυναμία: Θεωρούμε A να είναι ένα ημικύκλιο κέτρου o. Το A είναι κατά τόξα συνεκτικό αλλά όχι πολυγωνικά συνεκτικό. Πράγματι, εάν $\vec{a}, \vec{b}$ είναι 2 σημεία του A και υπάρχει πολυγωνική γραμμή του A που τα εννώνει, τότε, αν p, q είναι οποιαδήποτε 2 διαδοχικά σημεία της διαδρομής και m το μέσο τού $[p, q]$, έχουμε $om < op = oq$. Οπότε $[p, q] \not\subseteq A$.



Συνέχεια Πολυμεταβλητών Συναρτήσεων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει και πάλι μια επέκταση των ορισμών συνέχειας και ομοιόμορφης συνέχειας των αντίστοιχων συναρτήσεων του $\mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας τις επεκτάσεις αυτές θα δείξουμε ότι για τις συναρτήσεις $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ισχύουν παρόμοια αποτελέσματα με αυτά που γνωρίζουμε για τις πραγματικές συναρτήσεις.

3.1 Συνέχεια

Στις πραγματικές συναρτήσεις λέγαμε ότι μία συνάρτηση ήταν συνεχής σε ένα σύνολο όταν η τιμή της συνάρτησης σε κάθε σημείο του συνόλου δεν 'απέκλεινε πολύ' από τις τιμές της συνάρτησης σε γειτονικά σημεία. Παρόμοια λογική χρησιμοποιούμε για να εκφράσουμε την συνέχεια σε μεγαλύτερες διαστάσεις· συγκεκριμένα μια συνάρτηση θα είναι συνεχής σε ένα σύνολο εάν η τιμή - διανύσμα σε κάθε σημείο του συνόλου έχει μικρή διαφορά με τις τιμές - διανύσματα της συνάρτησης σε μία κοντινή σφαίρα.

Ορισμός: Συνέχεια συναρτήσεων $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:
Έστω f μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^m$, με $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Η f θα καλείται συνεχής στο $B \subseteq A$ εάν το ακόλουθο αληθεύει:

$$\forall \vec{x}_0 \in B, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \in S(\vec{x}_0, \delta) \cap B : ||f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)|| < \varepsilon$$

ή απλούστερα, με συμβολισμό ορίων θα μπορούσαμε να γράψουμε:

$$\forall \vec{x}_0 \in B, \lim_{x \to x_0} ||f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)|| = 0 \Leftrightarrow \forall \vec{x}_0 \in B, \lim_{x \to x_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$$

Πόρισμα: Συνέχεια συναρτήσεων μέσω ακολουθιών:
Έστω f μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^m$, με $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$. Εάν για κάθε $a \in B$ και για κάθε ακολουθία $\big(a(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \sqsubseteq B$ με $a(n) \to a$ ισχύει:

$$||f(a(n)) - f(a)|| \to 0$$

τότε η f είναι συνεχής στο B. Ισχύει και το αντίστροφο.

Αρχικά ας σταθεροποιήσουμε ένα $a \in B$ και ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι η f δεν είναι συνεχής στο a. Τότε, με άρνηση του ορισμού της συνέχειας παίρνουμε:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 : \exists x \in S(a, \delta) \cap B : ||f(x) - f(a)|| > \varepsilon$$

Αφού η παραπάνω σχέση ισχύει $\forall \delta > 0$, διαλέγουμε μια φθίνουσα ακολουθία συνόλων $S(a, \delta(i))$ και επειδή $\exists x(i) \in S(a, \delta(i)) : ||f(x) - f(a)|| > \varepsilon$, κατασκευάζουμε μία ακολουθία $\big(a(i)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ με $a(i) = x(i) \in S(a, \delta(i))$. Η $\big(a(i)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο a καθώς η ακτίνα των σφαιρών $S(a, \delta(i))$ τείνει στο 0, οπότε σύμφωνα με την εκφώνιση θα πρέπει:

$$||f(a(i)) - f(a)|| \to 0$$

Τούτο όμως έρχεται σε αντίθεση με αυτό που βρήκαμε προηγουμένως, ότι δηλαδή $||f(x) - f(a)|| > \varepsilon > 0$. Άρα η f συνεχής στο B.

Αντίστροφα τώρα, εάν υπήρχε μία ακολουθία $\big(a(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \sqsubseteq B$ με $a(n) \to a$ και επίσης:

$$||f(a(n)) - f(a)|| > \varepsilon, \text{ για κάποιο } \varepsilon > 0$$

Τότε παρατηρούμε ότι:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 : \exists a(n) \in S(a, \varepsilon) \cap B : ||f(a(n)) - f(a)|| > \varepsilon$$

Επειδή $\big(a(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \sqsubseteq B$ έχουμε ότι $a(n) \in B$, οπότε το προηγούμενο δεν είναι τίποτε άλλο παρά η άρνηση του ορισμού της συνέχειας της f, το οποίο είναι άτοπο. Άρα ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα: Θεώρημα Φράγματος:
Έστω f μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^m$, με $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Εάν το A είναι σύνολο κλειστό και φραγμένο και η f είναι συνεχής, τότε το σύνολο $f(A)$ είναι επίσης κλειστό και φραγμένο.

Ας θεωρίσουμε $\big(y(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ μια συγκλίνουσα ακολουθία του $f(A)$. Σύμφωνα με το αντίστοιχο πόρισμα του $2^{ου}$ κεφαλαίου ('Χαρακτηρισμός των Κλειστών συνόλων μέσω ακολουθιών') θα θέλαμε να δείξουμε ότι το όριό της (y) ανήκει στο $f(A)$. Επειδή $\big(y(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \sqsubseteq f(A)$, θα υπάρχει συγκλίνουσα ακολουθία $\big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $f(x(n)) = y(n)$. Επειδή A κλειστό, εάν $x(n) \to x$, τότε $x \in A$. Λόγω του πορίσματος συνέχειας μέσω ακολουθιών, θα πρέπει $y = f(x)$, οπότε $y \in f(A)$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

Θεώρημα: Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής στις πολλές διαστάσεις:
Έστω f μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, με $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Εάν το A είναι σύνολο κλειστό και φραγμένο και η f είναι συνεχής, τότε:

$$\exists \vec{a}, \vec{b} \in A : f(\vec{a}) = maxf(A),\ f(\vec{b}) = minf(A)$$

Από το προηγούμενο θεώρημα, το $f(A)$ είναι κλειστό και μάλιστα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Οπότε είναι δυνατόν να βρεθούν οι τιμές $supf(A), inff(A)$. Για τις 2 αυτές τιμές τώρα μπορούμε να βρούμε ακολουθίες $p(n) \to supf(A)$ και $q(n) \to inff(A)$, από τον ορισμό των sup, inf, καθώς $\forall\delta > 0, S(supf(A), \delta) \cap A \neq \emptyset$ και $\forall\delta > 0, S(inff(A), \delta) \cap A \neq \emptyset$. Επειδή $f(A)$ φραγμένο, από το αντίστοιχο πόρισμα του $2^{ου}$ κεφαλαίου ('Χαρακτηρισμός των Κλειστών συνόλων μέσω ακολουθιών') ισχύει:

$$supf(A), inff(A) \in f(A) \Rightarrow \exists \vec{a}, \vec{b} \in A : f(\vec{a}) = supf(A),\ f(\vec{b}) = inff(A)$$

Τέλος, επειδή $supf(A), inff(A) \in f(A)$, έχουμε $supf(A) = maxf(A)$, $inff(A) = minf(A)$ και το ζητούμενο απεδείχθη.

3.2 Ομοιόμορφη Συνέχεια

Όπως στις πραγματικές συναρτήσεις χαρακτηρίζαμε μια συνάρτηση ομοιόμορφα συνεχή σε ένα διάστημα εάν για κάθε μικρό ε μπορούσε να βρεθεί ένας μικρός δ τέτοιος ώστε σε κάθε υποδιάστημα μήκους δ η διαφορά των τιμών της συνάρτησης να μην ξεπερνούσε το ε, εδώ θα χαρακτηρίζουμε μια συνάρτηση ομοιόμορφα συνεχή εάν για κάθε μικρό ε μπορεί να βρεθεί ένας μικρός δ τέτοιος ώστε σε κάθε σφαίρα μήκους δ η διαφορά των τιμών - διανυσμάτων της συνάρτησης να μην ξεπερνάει το ε.

Ορισμός: Ομοιόμορφη συνέχεια συναρτήσεων $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:
Έστω f μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^m$, με $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Η f θα καλείται ομοιόμορφα συνεχής στο $B \subseteq A$ εάν το ακόλουθο αληθεύει:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \vec{x}, \vec{y} \in B \text{ με } ||\vec{x} - \vec{y}|| < \delta : ||f(\vec{x}) - f(\vec{y})|| < \varepsilon$$

Πόρισμα: Ομοιόμορφη συνέχεια και συνέχεια:
Έστω $f : A \to \mathbb{R}^m$, με $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$ μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο B. Τότε η f είναι συνεχής.

Πράγματι, για κάθε $\vec{x}_0 \in B$ θέτοντας στον ορισμό $\vec{y} = \vec{x}_0$ προκύπτει:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \in B \text{ με } ||\vec{x} - \vec{x}_0|| < \delta : ||f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)|| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \in S(\vec{x}_0, \delta) \cap B : ||f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)|| < \varepsilon$$

Αυτό όμως είναι ο ορισμός της συνέχειας της f· οπότε f συνεχής.

Πόρισμα: Ομοιόμορφη συνέχεια συναρτήσεων μέσω ακολουθιών:
Έστω f μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^m$, με $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$. Εάν για κάθε 2 ακολουθίες $\big(a(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}, \big(b(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \sqsubseteq B$ με $||a(n) - b(n)|| \to 0$ ισχύει:

$$||f(a(n)) - f(b(n))|| \to 0$$

τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο B. Ισχύει και το αντίστροφο.

Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι η συνάρτηση δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Με άρνηση του ορισμού της ομοιόμορφης συνέχειας παίρνουμε:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 : \exists x, y \in B \text{ με } ||x - y|| < \delta : ||f(x) - f(y)|| > \varepsilon$$

Επειδή $\forall \delta > 0 : \exists x, y \in B$ με $||x - y|| < \delta : ||f(x) - f(y)|| > \varepsilon$, μπορούμε να διαλέξουμε μια φθίνουσα ακολουθία ακτίνων $\delta(i)$ και να κατασκευάσουμε 2 ακολουθίες $\big(a(i)\big)_{i\in\mathbb{N}}, \big(b(i)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ τέτοιες ώστε $a(i) = x(i), b(i) = y(i)$ με $||x(i) - y(i)|| < \delta(i)$. Προφανώς, καθώς το $\delta(i)$ τείνει στο 0, η διαφορά των ακολουθιών $\big(a(i)\big)_{i\in\mathbb{N}}, \big(b(i)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ τείνει στο 0. Επομένως, λαμβάνοντας υπ΄ όψιν την υπόθεσή μας, θα πρέπει:

$$||f(a(i)) - f(b(i))|| \to 0$$

Τούτο όμως αντιβαίνει σε αυτό που βρήκαμε προηγουμένως, ότι δηλαδή $||f(x) - f(y)|| > \varepsilon > 0$. Άρα η f ομοιόμορφα συνεχής στο B.

Αντίστροφα, θα υποθέσουμε προς άτοπο ότι υπάρχουν 2 ακολουθίες $\big(a(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}, \big(b(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοιες ώστε $||a(n) - b(n)|| \to 0$ και επίσης:

$$||f(a(n)) - f(b(n))|| > \varepsilon, \text{ για κάποιο } \varepsilon > 0$$

Τότε παρατηρούμε ότι:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 : \exists a(n), b(n) : ||a(n) - b(n)|| < \delta : ||f(a(n)) - f(b(n))|| > \varepsilon$$

Επειδή $\big(a(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}, \big(b(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \sqsubseteq B$ έχουμε ότι $a(n), b(n) \in B$, οπότε το προηγούμενο δεν είναι τίποτε άλλο παρά η άρνηση του ορισμού της συνέχειας της f, το οποίο είναι άτοπο. Άρα ισχύει και το αντίστροφο.

Ορισμός: *Lipschitz* συνεχείς συναρτήσεις:
Έστω f μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^m$, με $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$. Η f θα καλείται Lipschitz συνεχής στο B εάν το ακόλουθο αληθεύει:

$$\exists M > 0 : \forall \vec{x}, \vec{y} \in B : ||f(\vec{x}) - f(\vec{y})|| < M \cdot ||\vec{x} - \vec{y}||$$

Πόρισμα: *Lipschitz* συνέχεια και Ομοιόμορφη συνέχεια:
Έστω $f : A \to \mathbb{R}^m$, με $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$ μια Lipschitz συνεχής συνάρτηση στο B. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Το συγκεκριμένο πόρισμα προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας για $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$. Συγκεκριμένα, μια f είναι ομοιόμορφα συνεχής εάν:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \vec{x}, \vec{y} \in B \text{ με } ||\vec{x} - \vec{y}|| < \delta : ||f(\vec{x}) - f(\vec{y})|| < \varepsilon$$

Επειδή η f είναι *Lipschitz* συνεχής, ισχύει ότι:

$$\exists M > 0 : \forall \vec{x}, \vec{y} \in B : ||f(\vec{x}) - f(\vec{y})|| < M \cdot ||\overset{<\delta}{\vec{x} - \vec{y}}|| < M \cdot \delta$$

οπότε θέτοντας $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$, προκύπτει:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0 : \forall \vec{x}, \vec{y} \in B \text{ με } ||\vec{x} - \vec{y}|| < \delta : ||f(\vec{x}) - f(\vec{y})|| < M \cdot \delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο B.

Θεώρημα: Θεμελιώδες Θεώρημα Συνέχειας:
Έστω f μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^m$, με $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$. Εάν B είναι κλειστό και φραγμένο και επίσης η f συνεχής στο B, τότε είναι και ομοιόμορφα συνεχής στο B.

Θεωρούμε οποιεσδήποτε 2 ακολουθίες $\big(a(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}, \big(b(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \sqsubseteq B$ οι οποίες συγκλίνουν και οι 2 στο k. Επειδή το B είναι κλειστό, από το πόρισμα του $2^{ου}$ κεφαλαίου ('Χαρακτηρισμός των Κλειστών συνόλων μέσω ακολουθιών'), $k \in B$. Επειδή και οι 2 ακολουθίες συγκλίνουν στο k, έχουμε $||a(n) - b(n)|| \to 0$. Από το πόρισμα τώρα του $3^{ου}$ κεφαλαίου ('Συνέχεια συναρτήσεων μέσω ακολουθιών'), επειδή f είναι συνεχής, $f(a(n)), f(b(n)) \to f(k)$. Τελικά λοιπόν:

$$||a(n) - b(n)|| \to 0 \Rightarrow ||f(a(n)) - f(b(n))|| \to 0$$

Από το πόρισμα αυτού του κεφαλαίου ('Ομοιόμορφη συνέχεια συναρτήσεων μέσω ακολουθιών'), προκύπτει το ζητούμενο, ότι δηλαδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο B.

Παραγωγισιμότητα και Διαφορισιμότητα

Για τις πραγματικές συναρτήσεις, λέγαμε ότι μια συνάρτηση ήταν παραγωγίσημη σε ένα σημείο x εάν για το επόμενο όριο συνέβαινε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=T\in\mathbb{R}$$

ή ισοδύναμα:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-Th}{h}=0$$

Ουσιαστικά το παραπάνω μας εκφράζει ότι η συνάστηση f, σε ένα πολύ μικρό διάστημα μήκους h, μπορεί να προσεγγιστεί από μία γραμμική συνάρτηση (ευθεία) παράλληλη της $T\cdot x$.

Για την επίτευξη της επέκτασης του ορισμού σε μεγαλύτερες διαστάσεις, είναι επόμενο λοιπόν η προσσέγιση αυτή να μην γίνεται πλέον από ευθείες του $\mathbb{R}$, αλλά από τις αντίστοιχες ευθείες των χώρων μεγαλύτερης διάστασης $\mathbb{R}^m\cdot$ δηλαδή από τα (υπερ)επίπεδα. Θα χρησιμοποιούμε λοιπόν γενικά γραμμικές συναρτήσεις μεγαλύτερης διάστασης, του τύπου $\vec{T}\cdot\vec{x}$, για να ορίσουμε την επέκταση της παραγωγισιμότητας, την διαφορισιμότητα.

Ορισμός: Διαφορισιμότητα και Διαφορικό:
Έστω f μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}^m$, με $B\subseteq A\subseteq\mathbb{R}^n$.
1. Διαφορισιμότητα: Θα λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο B εάν:

$$\forall\vec{x}\in B,\exists\vec{T}\text{ γραμμική απεικόνιση }:\lim_{||\vec{h}||\to 0}\frac{f(\vec{x}+\vec{h})-f(\vec{x})-\vec{T}(\vec{h})}{||\vec{h}||}=\vec{0}$$

2. Διαφορικό: Αυτήν την γραμμική απεικόνιση $\vec{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ για την οποία συμβαίνει:

$$\lim_{||\vec{h}||\to 0}\frac{f(\vec{x}_0+\vec{h})-f(\vec{x}_0)-\vec{T}(\vec{h})}{||\vec{h}||}=\vec{0}$$

θα την ονομάζουμε διαφορικό της f στο $\vec{x}_0$ και θα το συμβολίζουμε με $df\big|_{\vec{x}_0}$.

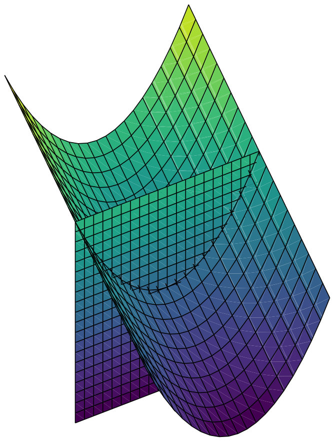
Σύμβαση: Παραγωγισιμότητα:
Εάν μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$, με $B\subseteq A\subseteq\mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο B, θα λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο B. Επίσης, εάν $g:A\to\mathbb{R}^m, A\subseteq\mathbb{R}$ με $g=(g_1,g_2,\cdots,g_m)$, ορίζουμε παράγωγο της g την:

$$\frac{dg}{dx}\Big|_x=\left(\frac{dg_1}{dx}\Big|_x,\frac{dg_2}{dx}\Big|_x,\cdots,\frac{dg_m}{dx}\Big|_x\right)$$

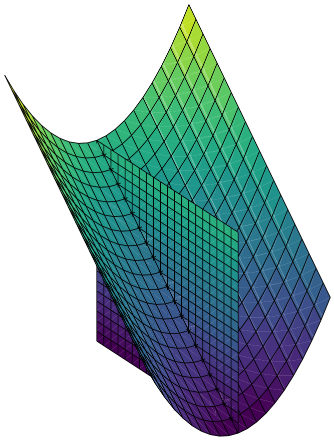
Ορισμός: Μερικές Παράγωγοι:
Έστω μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$, με $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Εάν $\vec{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_n)$, ορίζουμε ως μερική παράγωγο της f στο $\vec{a}$ ως προς την μεταβλητή $\vec{x}_i$ το όριο (όταν υπάρχει στο $\mathbb{R}$):

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{x}_i}\Big|_{\vec{a}}=\lim_{h_i\to 0}\frac{f\big(\vec{a}+(0,\cdots,0,h_i,0,\cdots,0)\big)-f(\vec{a})}{h_i}$$

Ουσιαστικά η μερική παράγωγος της f στο $\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ ως προς την μεταβλητή $\vec{x}_i$ αποτελεί την παράγωγο στο a_i της καμπύλης που προκύπτει από την τομή της γραφικής παράστασης της f με το (2 διαστάσεων) επίπεδο $(a_1,a_2,\cdots,\vec{x}_i,a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_m),\vec{y}:\vec{x}_1=a_1,\vec{x}_2=a_2,\cdots,\vec{x}_i\in\mathbb{R},\cdots,\vec{x}_m=a_m,\vec{y}\in\mathbb{R}$



Η καμπύλη - τομή της Cf με το επίπεδο $(\vec{x}_1, a_2), \vec{y}$. Δηλαδή η τομή της Cf με το επίπεδο $\vec{x}_1 \in \mathbb{R}, \vec{x}_2 = a_2, \vec{y} \in \mathbb{R}$



Η καμπύλη - τομή της Cf με το επίπεδο $(a_1, \vec{x}_2), \vec{y}$. Δηλαδή η τομή της Cf με το επίπεδο $\vec{x}_1 = a_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}, \vec{y} \in \mathbb{R}$

Ορισμός: Το σύνολο C^n:
Θα συμβολίζουμε με C^n το σύνολο όλων των συναρτήσεων f οι οποίες είναι n φορές παραγωγίσιμες ως προς x_i (για κάθε i) και η $n-$τάξεως παράγωγος $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_i^n}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Ορισμός: Κλίση / Ανάδελτα:
Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, με $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Θα ονομάζουμε ανάδελτα της f στο $\vec{a}$ το διάνυσμα:

$$\nabla f\big|_{\vec{a}} = \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}_1}\Big|_{\vec{a}}, \frac{\partial f}{\partial \vec{x}_1}\Big|_{\vec{a}}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial \vec{x}_1}\Big|_{\vec{a}} \right)$$

Για την μελέτη της κλίσης συναρτήσεων μεγαλύτερης διάστασης $f : A \to \mathbb{R}^m, A \subseteq \mathbb{R}^n$, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ακόλουθη γενίκευση: Θεωρώντας $f(\vec{a}) = \big(f_1(\vec{a}), f_2(\vec{a}), \cdots, f_m(\vec{a})\big)$ με $f_i : A \to \mathbb{R}$, θα ορίσουμε κλίση με την βοήθεια πινάκων, οι οποίοι θα δημιουργούνται από τα ανάδελτα των f_i, όπως στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός: Πίνακας $Jacobi$:
Έστω μια συνάρτηση $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$, με $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ο πίνακας:

$$\mathcal{J}f\big|_{\vec{a}} = \begin{pmatrix} \nabla f_1\big|_{\vec{a}} \\ \nabla f_2\big|_{\vec{a}} \\ \vdots \\ \nabla f_m\big|_{\vec{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}_1}\Big|_{\vec{a}} & \frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}_2}\Big|_{\vec{a}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}_n}\Big|_{\vec{a}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \vec{x}_1}\Big|_{\vec{a}} & \frac{\partial f_2}{\partial \vec{x}_2}\Big|_{\vec{a}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \vec{x}_n}\Big|_{\vec{a}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \vec{x}_1}\Big|_{\vec{a}} & \frac{\partial f_m}{\partial \vec{x}_2}\Big|_{\vec{a}} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial \vec{x}_n}\Big|_{\vec{a}} \end{pmatrix}$$

ονομάζεται πίνακας $Jacobi$ της f στο $\vec{a}$.

Λήμμα: Ύπαρξη συνεχών μερικών παραγώγων και Διαφορικό:
Έστω f συνάρτηση $C^1 \ni f : A \to \mathbb{R}$ με $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Για κάθε $\vec{a} \in A$, η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ με διαφορικό:

$$df\big|_{\vec{a}}(\vec{x}) = \nabla f\big|_{\vec{a}} \cdot \vec{x}$$

Έστω $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in A$ και $\vec{e}_i = (0, 0, \cdots, \overset{i-\vartheta έ\sigma\eta}{1}, \cdots, 0, 0)$. Θεωρούμε επίσης $\vec{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ ένα διάνυσμα μικρού μήκους. Το 'μικρού μήκους' εδώ ορίζεται έτσι ώστε το παραλληλεπίπεδο που ορίζεται από τις ακμές $\vec{a} + h_i\vec{e_i}$ να είναι υποσύνολο του A. Μελετούμε διαδοχικά τα εξής: Επειδή f είναι εν C^1, από το Θεώρημα Μέσης τιμής για τις πραγματικές συναρτήσεις, θα υπάρχει ένας $\xi_1 \in [a_1, a_1 + h_1]$ τέτοιος ώστε:

$$f(\vec{a} + h_1\vec{e}_1) - f(\vec{a}) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\vec{a}+(\xi_1 - a_1)\vec{e}_1}$$

Με παρόμοιο επιχείρημα, θα υπάρχει ένας $\xi_2 \in [a_2, a_2 + h_2]$ τέτοιος ώστε:

$$f(\vec{a} + h_1\vec{e}_1 + h_2\vec{e}_2) - f(\vec{a} + h_1\vec{e}_1) = h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{\vec{a}+h_1\vec{e}_1+(\xi_2 - a_2)\vec{e}_2}$$

Είναι εμφανές ότι συνεχίζοντας ανάλογα μπορεί να βρεθεί οικογένεια τέτοιων ξ_i για τα οποία συμβαίνει:

$$f(\vec{a} + h_1\vec{e}_1) - f(\vec{a}) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\vec{a}+(\xi_1 - a_1)\vec{e}_1}$$

$$f(\vec{a} + h_1\vec{e}_1 + h_2\vec{e}_2) - f(\vec{a} + h_1\vec{e}_1) = h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{\vec{a}+h_1\vec{e}_1+(\xi_2 - a_2)\vec{e}_2}$$

$$\vdots$$

$$f\Big(\vec{a} + \overbrace{\sum_{i\in[n]} h_i\vec{e}_i}^{\vec{h}}\Big) - f\Big(\vec{a} + \sum_{i\in[n-1]} h_i\vec{e}_i\Big) = h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{(\xi_n - a_n)\vec{e}_n + \vec{a} + \sum_{i\in[n-1]} h_i\vec{e}_i}$$

Προσθέτωντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη, βρίσκουμε ότι:

$$f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = \sum_{k\in[n]} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{(\xi_k - a_k)\vec{e}_k + \vec{a} + \sum_{i\in[k-1]} h_i\vec{e}_i}$$

Εάν τώρα θεωρίσουμε ότι $||\vec{h}|| \to 0$, επειδή για κάθε ξ_i ισχύει $a_i \leq \xi_i \leq a_i + h_i$, θα έχουμε $\xi_i \to a_i$. Λόγω της συνέχειας των μερικών παραγώγων:

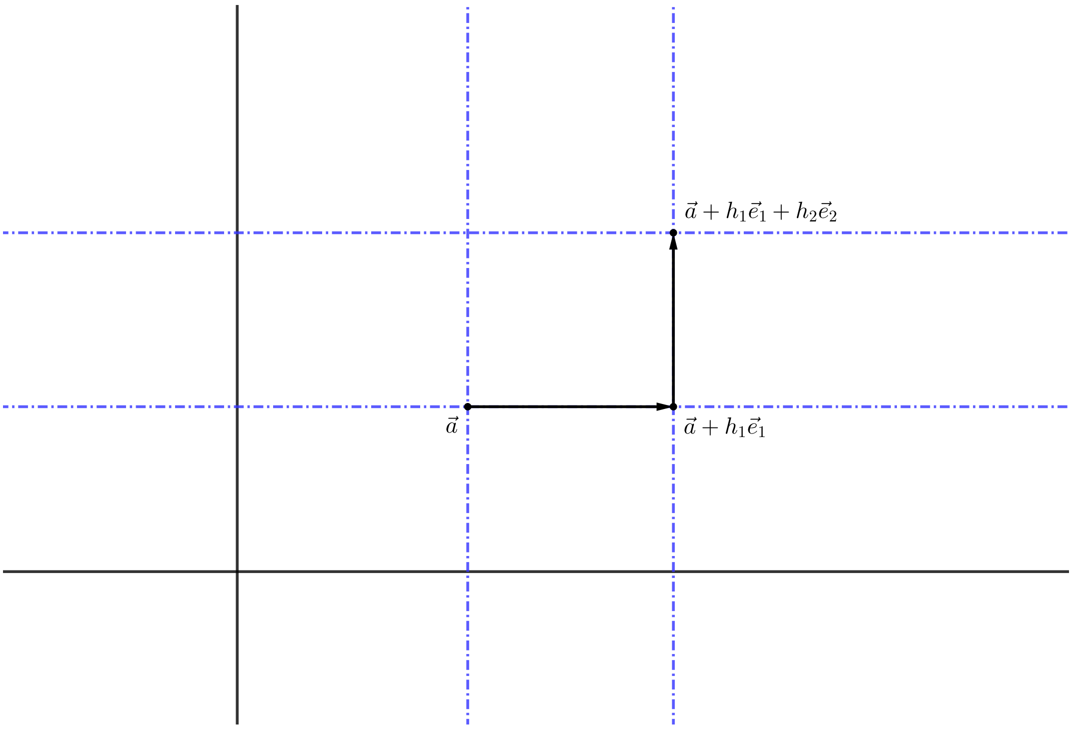
$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{(\xi_k - a_k)\vec{e}_k + \vec{a} + \sum_{i\in[k-1]} h_i\vec{e}_i} \overset{||\vec{h}||\to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{\vec{a}}$$

Οπότε για την παρακάτω τιμή μπορούμε να συνάγουμε το εξής:

$$\frac{f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) - \nabla f\big|_{\vec{a}} \cdot \vec{h}}{||\vec{h}||} = \frac{\sum_{k\in[n]} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{(\xi_k - a_k)\vec{e}_k + \vec{a} + \sum_{i\in[k-1]} h_i\vec{e}_i} - \nabla f\big|_{\vec{a}} \cdot \vec{h}}{||\vec{h}||} =$$

$$= \frac{\sum_{k\in[n]} h_k \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{(\xi_k - a_k)\vec{e}_k + \vec{a} + \sum_{i\in[k-1]} h_i\vec{e}_i} - \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{\vec{a}}\right)}{||\vec{h}||} \overset{||\vec{h}||\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Αυτό όμως είναι ο ορισμός διαφορισιμότητας της f. Η f λοιπόν είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ με διαφορικό την γραμμική απεικόνιση $\nabla f\big|_{\vec{a}} \cdot \vec{x}$



Θεώρημα: Κανόνας της Αλυσίδας:
1. Κανόνας της αλυσίδας και Διαφορικά: Έστω συναρτήσεις f, g με $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^m$ και $g : B \to A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Εάν f παραγωγίσιμη στο A και g διαφορίσιμη στο B με αντίστοιχα διαφορικά df και dg, τότε:

$$d(f \circ g) = df\big|_g(dg)$$

Το ίδιο αποτέλεσμα θα ίσχυε και αν $f : A \to \mathbb{R}^p$
2. Διαφόριση σύνθεσης: Έστω $C^1 \ni f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ (A ανοικτό) και $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n) : B \to A, g_i : B \to \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Ισχύει ότι:

$$\frac{d(f \circ g)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{g_1} \cdot \frac{dg_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{g_2} \cdot \frac{dg_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{g_n} \cdot \frac{dg_n}{dx}$$

1. Επειδή g διαφορίσιμη στο B, θα υπάρχει μία συνάρτηση $\varepsilon_g(h)$ που θα συγκλίνει στο 0 καθώς το h τείνει στο 0 και θα ικανοποιεί επίσης την σχέση:

$$g(x+h) - g(x) - dg(h) = ||h||\varepsilon_g(h)$$

Εάν $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη, τότε θα υπάρχει όπως πρίν μία συνάρτηση $\varepsilon_{f \circ g}(h)$ που θα συγκλίνει στο 0 καθώς το h τείνει στο 0 και θα ικανοποιεί επίσης την σχέση:

$$f(g(x+h)) - f(g(x)) - d(f \circ g)(h) = ||h||\varepsilon_{f \circ g}(h)$$

Ας μελετήσουμε όμως πρώτα την τιμή $f(g(x+h))$, για να προσδιορίσουμε έτσι εάν πράγματι η σύνθεση παραγωγίζεται. Από την σχέση διαφορισιμότητας της g μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην σύνθεση την τιμή $g(x+h)$:

$$f(g(x) + dg(h) + ||h||\varepsilon_g(h)) \Leftrightarrow f(g(x) + ||h||(dg(\widehat{h}) + \varepsilon_g(h)))$$

Θέτωντας τώρα $\eta = ||h||(dg(\widehat{h}) + \varepsilon_g(h))$, παρατηρούμε ότι καθώς $h \to 0$, έχουμε $\eta \to 0$ και επιπλέον η τιμή $f(g(x) + ||h||(dg(\widehat{h}) + \varepsilon_g(h)))$ γίνεται $f(g(x) + \eta)$. Επειδή τώρα $g(x) \in A$ και f παραγωγίσιμη στο A, θα υπάρχει μια $\bar{\varepsilon}_{f \circ g}(\eta) \overset{\eta \to 0}{\longrightarrow} 0$ για την οποία θα ισχύει:

$$f(g(x) + \eta) - f(g(x)) - df\big|_g(\eta) = ||\eta||\bar{\varepsilon}_{f \circ g}(\eta)$$

Όμως $g(x) + \eta = g(x+h)$ και $\eta = ||h||(dg(\widehat{h}) + \varepsilon_g(h))$, οπότε:

$$f(g(x+h)) - f(g(x)) - df\big|_g\left(||h||(dg(\widehat{h}) + \varepsilon_g(h))\right) = ||||h||(dg(\widehat{h}) + \varepsilon_g(h))||\bar{\varepsilon}_{f \circ g}(||h||(dg(\widehat{h}) + \varepsilon_g(h))) \Leftrightarrow$$

$$f(g(x+h)) - f(g(x)) - df\big|_g(dg(h)) = ||||h||(dg(\widehat{h}) + \varepsilon_g(h))||\bar{\varepsilon}_{f \circ g}(||h||(dg(\widehat{h}) + \varepsilon_g(h))) + ||h||df\big|_g(\varepsilon_g(h))$$

Τέλος, εάν θέσουμε $\varepsilon_{f\circ g}(h) = ||(dg(\widehat{h})+\varepsilon_g(h))||\bar{\varepsilon}_{f\circ g}(||h||(dg(\widehat{h})+\varepsilon_g(h)))+df\big|_g(\varepsilon_g(h))$, παρατηρούμε ότι $\varepsilon_{f\circ g} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ και συνεπώς:

$$f(g(x+h)) - f(g(x)) - df\big|_g(dg(h)) = ||h||\varepsilon_{f\circ g}(h)$$

ή αλλιώς:

$$\lim_{||h||\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(x) - df\big|_g(dg(h))}{||h||} = \lim_{h\to 0} \varepsilon_{f\circ g}(h) = 0$$

Επομένως η σύνθεση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη με διαφορικό $d(f\circ g) = df\big|_g(dg)$.

Εάν θέλαμε να γενικεύσουμε το παραπάνω και για διαφορίσιμες συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}^p$, θα γράφαμε $f = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$, $f_i : A \to \mathbb{R}$ και θα εφαρμόζαμε το θεώρημα όπως το έχουμε αποδείξει μέχρι στιγμής:

$$d(f\circ g) = \big(d(f_1\circ g), d(f_2\circ g), \cdots, d(f_p\circ g)\big) = \big(df_1\big|_g(dg), df_2\big|_g(dg), \cdots, df_p\big|_g(dg)\big) = df\big|_g(dg)$$

2. Από το *1.* βρήκαμε ότι εάν df, dg είναι τα διαφορικά των f και g αντίστοιχα, ισχύει: $d(f\circ g) = df\big|_g(dg)$. Επειδή $f\in C^1$, από το προηγούμενο λήμμα ισχύει ότι $df\big|_x(X) = \nabla f\big|_x \cdot X$. Εξ ορισμού τώρα των διαφορικών, το $dg\big|_x$ είναι η τιμή της παραγώγου της g στο x, ενώ αντίστοιχα το $d(f\circ g)\big|_x$ είναι η τιμή της παραγώγου της $f\circ g$ στο x. Συμμαζεύοντας όλα αυτά προκύπτει:

$$\frac{d(f\circ g)}{dx}\Big|_x = \nabla f\big|_{g(x)} \cdot \frac{dg}{dx}\Big|_x \Leftrightarrow$$

$$\frac{d(f\circ g)}{dx}\Big|_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{g_1(x)}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{g_2(x)}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{g_1(x)}\right)\cdot\left(\frac{dg_1}{dx}\Big|_x, \frac{dg_1}{dx}\Big|_x, \cdots, \frac{dg_n}{dx}\Big|_x\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{d(f\circ g)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{g_1}\cdot\frac{dg_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{g_2}\cdot\frac{dg_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{g_n}\cdot\frac{dg_n}{dx}$$

Θεώρημα: Θεώρημα Μέσης τιμής του Διαφορικού λογισμού:
Έστω ανοικτό σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}^n$ και μία συνάρτηση $C^1 \ni f : A\to\mathbb{R}$. Εάν $\vec{a}\neq\vec{b}\in A$, και f παραγωγίσιμη στο $[\vec{a},\vec{b}]$, τότε:

$$\exists\xi\in[\vec{a},\vec{b}] - \{\vec{a},\vec{b}\} : f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f\big|_\xi\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

Έστω $\tau : [0,1]\to[\vec{a},\vec{b}]$ με $\tau(t) = \vec{a} + t(\vec{b}-\vec{a})$. Παραγωγίζοντας την σύνθεση $f\circ\tau : [0,1]\to\mathbb{R}$ παίρνουμε:

$$\frac{d(f\circ\tau)}{dt} = \frac{df}{d\tau}\Big|_\tau\cdot\frac{d\tau}{dt} = \nabla f\big|_\tau\cdot\tau' = \nabla f\big|_\tau\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

Επειδή η σύνθεση $f\circ\tau$ είναι πραγματική συνάρτηση, γι΄ αυτήν θα ισχύει το Θεώρημα Μέσης τιμής για πραγματικές συναρτήσεις. Δηλαδή:

$$\exists t_0\in(0,1) : \frac{d(f\circ\tau)}{dt}\Big|_{t_0} = f\circ\tau(1) - f\circ\tau(0) = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$$

Οπότε με εφαρμογή στην παράγωγο της σύνθεσης:

$$\frac{d(f\circ\tau)}{dt}\Big|_{t_0} = f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f\big|_{\tau(t_0)}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

Εάν θέσουμε τώρα $\tau(t_0) = \xi$, προκύπτει το ζητούμενο, ότι δηλαδή:

$$\exists\xi\in[\vec{a},\vec{b}] - \{\vec{a},\vec{b}\} : f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f\big|_\xi\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

Θεώρημα: Θεώρημα *Rolle* για πολυμεταβλητές συναρτήσεις:
Έστω ανοικτό σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}^n$ και μία συνάρτηση $C^1\ni f : A\to\mathbb{R}$. Εάν $\vec{a}\neq\vec{b}\in A$, και f παραγωγίσιμη στο $[\vec{a},\vec{b}]$ με $f(\vec{a}) = f(\vec{b})$, τότε:

$$\exists\xi\in[\vec{a},\vec{b}] - \{\vec{a},\vec{b}\} : \nabla f\big|_\xi\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = 0$$

Από το Θεώρημα μέσης τιμής, θα υπάρχει $\xi \in [\vec{a}, \vec{b}] - \{\vec{a}, \vec{b}\}$ τέτοιο ώστε $f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f\big|_{\xi} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$. Επειδή $f(\vec{a}) = f(\vec{b})$, προκύπτει το ζητούμενο:

$$\exists \xi \in [\vec{a}, \vec{b}] - \{\vec{a}, \vec{b}\} : \nabla f\big|_{\xi} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

Θεώρημα: Θεώρημα Διπλής Μέσης τιμής:
Έστω ανοικτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και δύο συναρτήσεις $C^1 \ni f, g : A \to \mathbb{R}$. Εάν $\vec{a} \neq \vec{b} \in A$, και f, g παραγωγίσιμες στο $[\vec{a}, \vec{b}]$, τότε:

$$\exists \xi \in [\vec{a}, \vec{b}] - \{\vec{a}, \vec{b}\} : \nabla f\big|_{\xi} \cdot (g(\vec{b}) - g(\vec{a})) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \nabla g\big|_{\xi} \cdot (f(\vec{b}) - f(\vec{a})) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

Θεωρούμε H την συνάρτηση $H : [\vec{a}, \vec{b}] \to \mathbb{R}$ με:

$$H(\vec{x}) = (f(\vec{x}) - f(\vec{a})) \cdot (g(\vec{b}) - g(\vec{a})) + (g(\vec{b}) - g(\vec{x})) \cdot (f(\vec{b}) - f(\vec{a}))$$

Η H είναι διαφορίσιμη στο $[\vec{a}, \vec{b}]$ ως σύνθεση διαφορίσιμων συναρτήσεων. Επειδή επιπλέον $H(\vec{a}) = H(\vec{b}) = (f(\vec{b}) - f(\vec{a})) \cdot (g(\vec{b}) - g(\vec{a}))$, γι' αυτήν θα ισχύει το Θεώρημα *Rolle*. Επομένως:

$$\exists \xi \in [\vec{a}, \vec{b}] - \{\vec{a}, \vec{b}\} : \nabla H\big|_{\xi} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(\vec{x}) \cdot (g(\vec{b}) - g(\vec{a})) - g(\vec{x}) \cdot (f(\vec{b}) - f(\vec{a}))\big|_{\xi} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\nabla f(\vec{x}) \cdot (g(\vec{b}) - g(\vec{a}))\big|_{\xi} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \nabla g(\vec{x}) \cdot (f(\vec{b}) - f(\vec{a}))\big|_{\xi} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \Leftrightarrow$$

$$\nabla f(\vec{x})\big|_{\xi} \cdot (g(\vec{b}) - g(\vec{a})) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \nabla g(\vec{x})\big|_{\xi} \cdot (f(\vec{b}) - f(\vec{a})) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

Αυτό είναι το ζητούμενο.

Ορισμός: Ανισοτικές σχέσεις και Μονοτονία:
1. Ανισοτικές σχέσεις: Ορίζουμε ως "$\leq$" την στοιχειώδη ανισοτική σχέση στο $\mathbb{R}^n$ που ισχύει αν και μόνο αν:

$$\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \forall i \in [n] : x_i \leq y_i$$

2. Μονοτονία: Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Η f θα καλείται αύξουσα στο A εάν:

$$\forall x \leq y \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq f(y)$$

Αντίστοιχα, η f θα καλείται φθίνουσα στο A εάν:

$$\forall x \leq y \in \mathbb{R}^n, f(y) \leq f(x)$$

Πόρισμα: Μονοτονία και Μερικές παράγωγοι:
Έστω συνάρτηση $C^1 \ni f : A \to \mathbb{R}$ με $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και κυρτό. Εάν:

$$\forall i \in [n], \forall \vec{x} \in A : \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\vec{x}} \geq 0$$

Τότε η f είναι αύξουσα.

Πράγματι, έστω 2 σημεία $\vec{a}, \vec{b} \in A$ με $\vec{a} \leq \vec{b}$. Επειδή το A είναι κυρτό, το ευθύγραμμο τμήμα $[\vec{a}, \vec{b}]$ περιέχεται στο A. Με εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης τιμής, μπορεί να βρεθεί $\xi \in [\vec{a}, \vec{b}] - \{\vec{a}, \vec{b}\}$ τέτοιος ώστε:

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f\big|_{\xi} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

Γράφοντας ισοδύναμα τα $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ και $\vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \sum_{i \in [n]} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\xi} \cdot (b_i - a_i)$$

Από την υπόθεση, $\forall i \in [n], \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_\xi \geq 0$ και επειδή $\vec{a} \leq \vec{b}$, έπεται $\forall i \in [n], b_i - a_i \geq 0$. Έχουμε λοιπόν ότι κάθε όρος $\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_\xi \cdot (b_i - a_i)$ του αθροίσματος είναι μη αρνητικός· δηλαδή:

$$\vec{a} \leq \vec{b} \Rightarrow f(\vec{b}) - f(\vec{a}) \geq 0 \Rightarrow f(\vec{a}) \leq f(\vec{b}) \rightarrow \text{ αύξουσα}$$

Να σημειωθεί ότι παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει και για τις φθίνουσες. Συγκεκριμένα, εάν:

$$\forall i \in [n], \forall \vec{x} \in A : \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\vec{x}} \leq 0$$

θα είχαμε ότι η f θα ήταν φθίνουσα.

Πρόταση: 'Μοναδικότητα' των συναρτήσεων με ίσες μερικές παραγώγους:
Έστω συναρτήσεις $C^1 \ni f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ με $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και πολυγωνικά συνεκτικό. Εάν:

$$\forall i \in [n], \forall \vec{x} \in A : \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\vec{x}} = \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{\vec{x}}$$

Τότε $f(\vec{x}) = g(\vec{x}) + c, c \in \mathbb{R}$.

Σταθεροποιούμε ένα $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ και έστω επίσης τυχαίο $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Επειδή A είναι πολυγωνικά συνεκτικό, θα υπάρχει πολυγωνική διαδρομή:

$$\bigcup_{i \in [k]} [\vec{a}_i, \vec{a}_{i+1}] \subseteq A$$

με $\vec{a}_1 = \vec{a}$ και $\vec{a}_{k+1} = \vec{x}$. Έπειτα, σε καθένα από τα $[\vec{a}_i, \vec{a}_{i+1}]$ εφαρμόζουμε το Θεώρημα Διπλής μέσης τιμής και παίρνουμε ότι:

$$\exists \xi_i \in [\vec{a}_i, \vec{a}_{i+1}] - \{\vec{a}_i, \vec{a}_{i+1}\} : \nabla f\big|_{\xi_i} \cdot (g(\vec{a}_{i+1}) - g(\vec{a}_i)) \cdot (\vec{a}_{i+1} - \vec{a}_i) = \nabla f\big|_{\xi_i} \cdot (f(\vec{a}_{i+1}) - f(\vec{a}_i)) \cdot (\vec{a}_{i+1} - \vec{a}_i)$$

Επειδή από την υπόθεση $\forall i \in [n], \forall \vec{x} \in A : \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\vec{x}} = \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{\vec{x}}$ τα ανάδελτα $\nabla f\big|_{\vec{\xi_i}}$ και $\nabla g\big|_{\vec{\xi_i}}$ μεταξύ τους θα πρέπει να είναι ίσα και επομένως είναι δυνατόν να παρθεί το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$f(\vec{a}_2) - f(\overbrace{\vec{a}_1}^{\vec{a}}) = g(\vec{a}_2) - g(\overbrace{\vec{a}_1}^{\vec{a}})$$

$$f(\vec{a}_3) - f(\vec{a}_2) = g(\vec{a}_3) - g(\vec{a}_2)$$

$$\vdots$$

$$f(\overbrace{\vec{a}_{k+1}}^{\vec{x}}) - f(\vec{a}_k) = g(\overbrace{\vec{a}_{k+1}}^{\vec{x}}) - g(\vec{a}_k)$$

Προσθέτωντας τώρα κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο:

$$f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = g(\vec{x}) - g(\vec{a}) \Rightarrow f(\vec{x}) = g(\vec{x}) + \overbrace{f(\vec{a}) - g(\vec{a})}^{c} \Rightarrow f(\vec{x}) = g(\vec{x}) + c$$

Πρόταση: Φραγμένες Μερικές Παράγωγοι και *Lipschitz* συνέχεια:
1. *Έστω συνάρτηση $C^1 \ni f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό. Εάν η f έχει φραγμένες μερικές παραγώγους, τότε είναι Lipschitz συνεχής.*
2. *Γενικότερα, εάν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό και η f έχει φραγμένες μερικές παραγώγους, τότε είναι Lipschitz συνεχής.*

1. Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, θα δείξουμε ότι:

$$\forall x, y \in A, |f(x) - f(y)| \leq sup_A ||\nabla f|| \cdot ||x - y||$$

Επειδή το A είναι κυρτό και $f \in C^1$, είναι δυνατόν να εφαρμοστεί το Θεώρημα της Μέσης τιμής στο ευθύγραμμο τμήμα $[x, y]$. Προκύπτει λοιπόν ότι:

$$\exists \xi \in [x, y] - \{x, y\} : f(x) - f(y) = \nabla f\big|_\xi \cdot (x - y)$$

Με απόλυτες τιμές σε κάθε μέρος της εξίσωσης:

$$|f(x) - f(y)| = |\nabla f\big|_\xi \cdot (x - y)| \leq ||\nabla f\big|_\xi|| \cdot ||x - y||$$

Όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την γνωστή ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου:

$$|\alpha \cdot \beta| = ||\alpha|| \cdot ||\beta|| \cdot |cos(\widehat{\alpha, \beta})|$$

Επειδή οι μερικές παράγωγοι είναι φραγμένες, $-M_n < \dfrac{\partial f}{\partial x_n} < M_n \in \mathbb{R}_+$, το σύνολο:

$$\{||\nabla f\big|_x||, x \in A\}$$

είναι φραγμένο από το $||M|| = ||(M_1, M_2, \cdots, M_n)||$. Οπότε υπάρχει πραγματικό *supremum* για το οποίο θα ισχύει:

$$\forall \xi \in A, ||\nabla f\big|_\xi|| \leq sup_A||\nabla f||$$

Με αυτήν την σχέση προκύπτει το ζητούμενο, ότι δηλαδή:

$$\exists L = sup_A||\nabla f|| \in \mathbb{R} : \forall x, y \in A, |f(x) - f(y)| \leq L \cdot ||x - y|| \Rightarrow f \text{ } Lipschitz \text{ συνεχής.}$$

2. Έστω $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n), b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$. Εφόσον οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν, $-M_n < \dfrac{\partial f}{\partial x_n} < M_n \in \mathbb{R}_+$, μπορούμε να εφαρμόσουμε διαδοχικά το Θεώρημα Μέσης τιμής για μία μεταβλητή σε καθεμία από τις συναρτήσεις που προκύπτουν από την f με τομή των επιπέδων: $x_i, y \in \mathbb{R}$, x_j σταθερός πραγματικός αριθμός, για $j \neq i$. Είναι λοιπόν δυνατόν να βρεθούν κατάλληλα ξ_i τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned}
f(\overbrace{a_1, a_2, \cdots, a_n}^{a}) - f(b_1, a_2, \cdots, a_n) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\xi_1} \cdot (a_1 - b_1) \\
f(b1, a_2, \cdots, a_n) - f(b_1, b_2, \cdots, a_n) &= \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{\xi_2} \cdot (a_2 - b_2) \\
&\vdots \\
f(b1, b_2, \cdots, a_n) - f(\overbrace{b_1, b_2, \cdots, b_n}^{b}) &= \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\xi_n} \cdot (a_n - b_n)
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις αυτές που βρήκαμε κατά μέλη, προκύπτει το εξής αποτέλεσμα:

$$f(a) - f(b) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\xi_i} \cdot (a_i - b_i) \Rightarrow |f(a) - f(b)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\xi_i} \cdot (a_i - b_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\xi_i}\right|\right| \cdot ||a_i - b_i||$$

Επειδή οι μερικές παράγωγοι είναι πεπερασμένες στο πλήθος, μπορεί να βρεθεί ένας $M \in \mathbb{R}_+$ τέτοιος ώστε $M = max\left\{\left|\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\xi_i}\right|\right|\right\}$, και συνεπώς η άνωθεν ανισότητα μπορεί να γίνει:

$$|f(a) - f(b)| \leq M \cdot \sum_{i=1}^{n} ||a_i - b_i|| \leq nM \cdot ||a - b||$$

Δηλαδή η f είναι συνάρτηση *Lipschitz* συνεχής.

Ορισμός: Κατευθυνόμενη Παράγωγος:
Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και κυρτό. Ονομάζουμε κατευθυνόμενη παράγωγο της f ως προς το (μη μηδενικό) διάνυσμα $\vec{v}$ τον αριθμό (όταν ορίζεται):

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h \cdot \vec{v}) - f(\vec{x})}{h}$$

Θεώρημα: Κανόνας του $L'Hospital$ για διμεταβλητές συναρτήσεις:
Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : A \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε τα εξής:
1. Το σύνολο A είναι κυρτό
2. Το σύνολο $M = \{x \in A | f(x) = g(x) = 0\}$ είναι εν C^1 καμπύλη γ
3. $\exists v \not\parallel M = \gamma$
4. $\exists h \in M$ τέτοιο ώστε $\exists r > 0$ για το οποίο κάθε ευθεία παράλληλη του v που τέμνει τον κύκλο $S(h, r)$, τέμνει και την καμπύλη γ
5. Το όριο $\dfrac{D_v f(x)}{D_v g(x)}, x \to h$ υπάρχει
6. Το όριο $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ καθώς το $x \to h$ από την καμπύλη γ υπάρχει και είναι ίσο με το όριο της υπόθεσης 5
Τότε το όριο $\dfrac{f(x)}{g(x)}, x \to h$ είναι ίσο με το όριο $\dfrac{D_v f(x)}{D_v g(x)}, x \to h$

Μέρος Ι: Οι ακολουθίες που προσεγγίζουν το h είναι υποσύνολα της καμπύλης γ:

Εδώ προκύπτει άμεσα το ζητούμενο λόγω της υπόθεσης *6*.

Μέρος ΙΙ: Το όριο $\dfrac{f(x)}{g(x)}, x \to h$ είναι το όριο $\dfrac{D_v f(x)}{D_v g(x)}, x \to h$ από κάθε κατεύθυνση διαφορετική της γ:

Περίπτωση Α: Οι ακολουθίες που προσεγγίζουν το h δεν έχουν τομή με την καμπύλη γ:
Ορίζουμε ακολουθίες $\left(a_i\right)_{i\in\mathbb{N}} \sqsubseteq \gamma$ και $\left(x_i\right)_{i\in\mathbb{N}} \sqsubseteq A - M$ με $x_i \to h$ τέτοιες ώστε $x_i - a_i \parallel v$. Για κάθε ευθεία $\varepsilon_i = a_i \vee x_i$ από το Θεώρημα Διπλής Μέσης τιμής για πραγματικές συναρτήσεις, θα υπάρχει ένας $\xi_i \in [a_i, x_i] - \{a_i, x_i\}$ τέτοιος ώστε:

$$\frac{D_v f(\xi_i)}{D_v g(\xi_i)} = \frac{f(x_i) - f(a_i)}{g(x_i) - g(a_i)} \overset{a_i \in M}{=} \frac{f(x_i)}{g(x_i)}$$

Ισχυριζόμαστε ότι $\xi_i \to h$. Πράγματι, το x_i τείνει εξ ορισμού στο h και το a_i θα προσεγγίζει επίσης το h. Αυτό διότι αν $a_i \not\to h$, τότε θεωρούμε:

$$\delta \text{ το διάνυσμα με αρχή στην } \gamma, \text{ με πέρας το } h \text{ και μέτρο } inf\{||h - a_i||\} > 0$$

Θεωρούμε k να είναι το σημείο προβολή του πέρατος του δ στην ευθεία E, η οποία διέρχεται από την αρχή του δ και είναι παράλληλη στο v. Εξ ορισμού των ακολουθιών των a_i και x_i, η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η απόσταση $||h - x_i||$ θα είναι:

$$||h - k|| = ||\delta|| \cdot sin\big(\widehat{\delta + k - h, \delta}\big)$$

Ισχυριζόμαστε ότι το ημίτονο είναι θετικό. Ισοδύναμα δηλαδή, ισχυριζόμαστε ότι $\delta \not\parallel E$. Πράγματι, ας θεωρήσουμε $(X(t), Y(t))$ μια παραμέτριση της γ, με την αρχή του δ να είναι σημείο $(X(t_0), Y(t_0))$ και το πέρας του να είναι $(X(t_1), Y(t_1))$. Εάν $\delta \parallel E$, από το Θεώρημα Διπλής Μέσης τιμής για πραγματικές συναρτήσεις, είναι δυνατόν να βρεθεί αριθμός ξ τέτοιος ώστε:

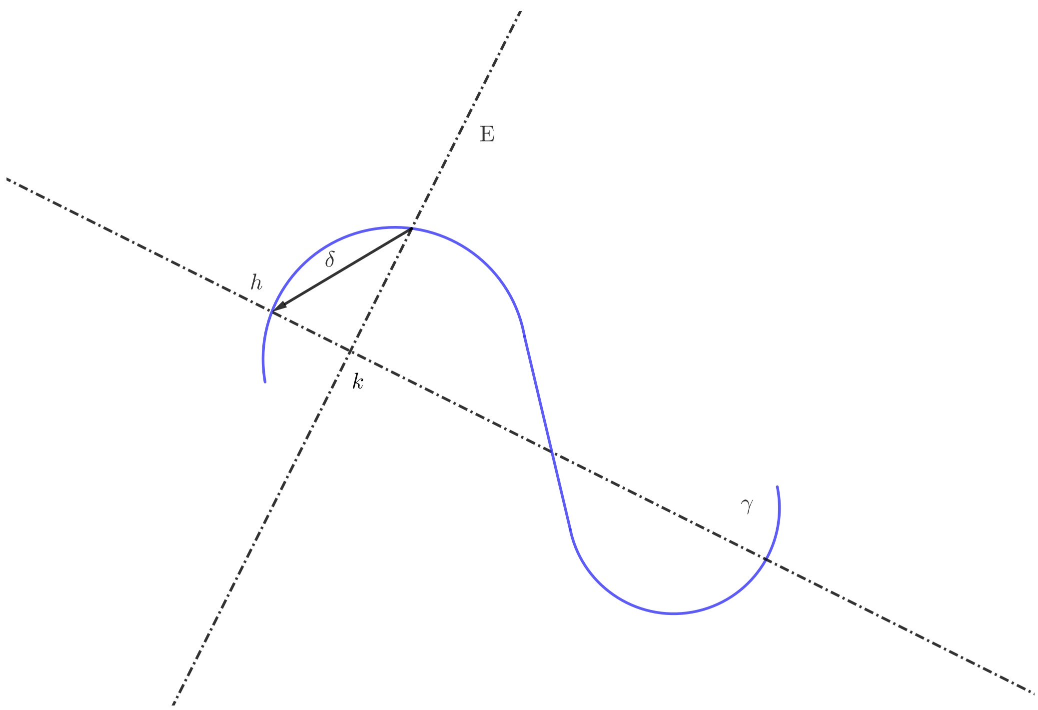
$$\frac{X(t_1) - X(t_0)}{t_1 - t_0} = X'(\xi) \text{ και } \frac{Y(t_1) - Y(t_0)}{t_1 - t_0} = Y'(\xi)$$

Επειδή η κλίση του δ ορίζεται από τις ποσότητες $\dfrac{X(t_1) - X(t_0)}{t_1 - t_0}, \dfrac{Y(t_1) - Y(t_0)}{t_1 - t_0}$, προκύπτει ότι το δ θα είναι παράλληλο με την εφαπτομένη της γ στο $(X(\xi), Y(\xi))$. Επειδή $\delta \parallel E$ και $E \parallel v$, έπεται άτοπο της υπόθεσης *3*. Άρα πράγματι το ημίτονο είναι θετικό. Λαμβάνοντας ακόμη υπ' όψιν την υπόθεση $||\delta|| > 0$, προκύπτει ότι:

$$||h - k|| > 0 \Rightarrow inf\{||h - x_i||\} > 0 \Rightarrow x_i \not\to h$$

Αυτό όμως είναι άτοπο. Οπότε $a_i \to h$. Επειδή $\xi_i \in [a_i, x_i] - \{a_i, x_i\}$ έχουμε ότι $\xi_i \to h$ και συνεπώς:

$$\lim_{x\to h} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to h} \frac{D_v f(x)}{D_v g(x)}$$



Περίπτωση Β: Οι ακολουθίες που προσεγγίζουν το h έχουν μη κενή τομή με την καμπύλη γ:
Ουσιαστικά εδώ αναγόμαστε στις 2 προαναφερθείσες περιπτώσεις του *Μέρους Ι* και του *Μέρους ΙΙ, Περίπτωση Α*.

Εάν η ακολουθία (x_i) που προσεγγίζει το h είναι τελικά υποσύνολο της γ ή έχει τελικά κενή τομή με την γ, εφαρμόζουμε στα τελικά τμήματά της την μέθοδο των περιπτώσεων του *Μέρους Ι* και του *Μέρους ΙΙ, Περίπτωση Α* αντίστοιχα.

Διαφορετικά, θεωρούμε τις 2 υπακολουθίες $(\tilde{x}_i), (\bar{x}_i)$ που προσεγγίζουν το h, η πρώτη από την καμπύλη γ και η δεύτερη εκτός της καμπύλης γ, και εφαρμόζουμε σε καθεμία από αυτές την μέθοδο των περιπτώσεων του *Μέρους Ι* και του *Μέρους ΙΙ, Περίπτωση Α* αντίστοιχα. Επειδή οι 2 υπακολουθίες έχουν το ίδιο όριο και σύσσωμες δημιουργούν την αρχική ακολουθία, η αρχική ακολουθία θα έχει το όριο των υπακολουθιών. Δηλαδή:

$$\lim_{x=x_i\to h}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x=x_i\to h}\frac{D_v f(x)}{D_v g(x)}$$

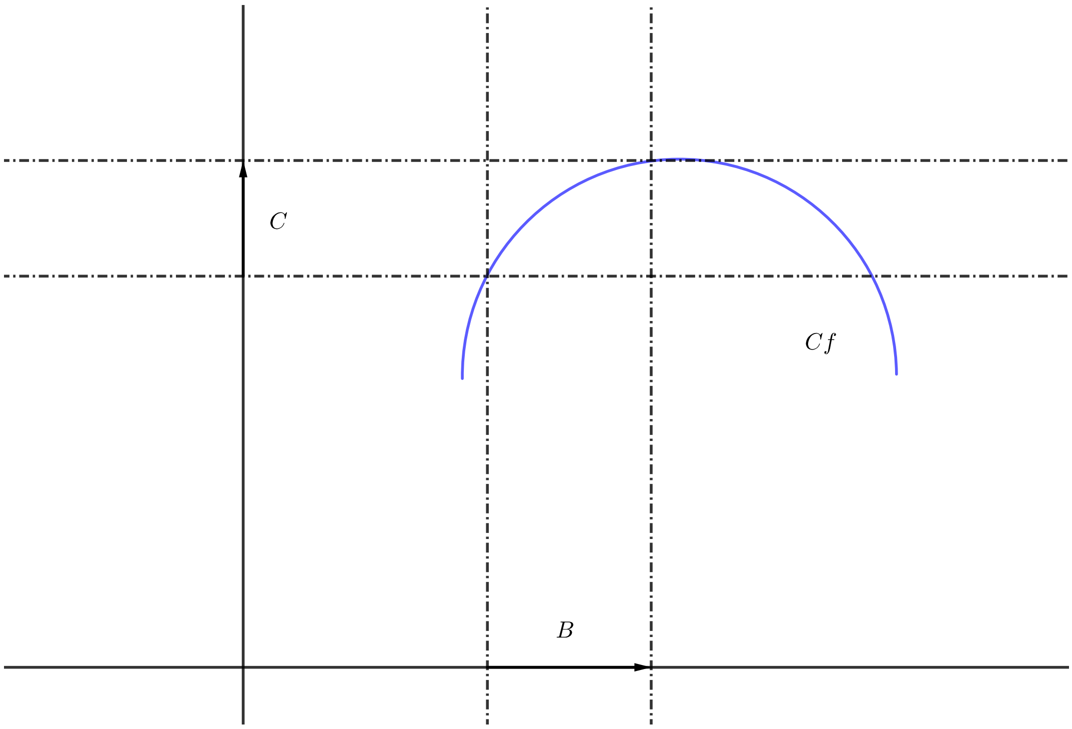
Θεώρημα Αντίστροφης

Έχοντας μελετήσει την παραγωγισιμότητα και την διαφορισιμότητα των πολυμεταβλητών συναρτήσεων, ένα λογικό επόμενο βήμα είναι η μελέτη περιπτώσεων αντιστρεψιμότητας. Θα δείξουμε ότι, όπως στην περίπτωση των πραγματικών συναρτήσεων με συνεχείς παραγώγους, σε περιοχές σημείων με μη μηδενική παράγωγο οι συναρτήσεις ήταν τοπικά αντιστρέψιμες, ανάλογα εδώ κάθε συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους και με την ορίζουσα του πίνακα *Jacobi* της τοπικά μη μηδενική, θα έχει τοπική αντίστροφο.

Θεώρημα: Θεώρημα της Αντίστροφης συνάρτησης:
Έστω μία συνάρτηση $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n) : A \to \mathbb{R}^n, f_i \in C^1$ *με* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό. Εάν σε ένα* $\vec{a} \in A$ *συμβαίνει:*

$$det\mathcal{J}f\big|_{\vec{a}} \neq 0$$

υπάρχουν σύνολα B, C *τέτοια ώστε* $\vec{a} \in B$, $f(\vec{a}) \in C$ *με τον περιορισμό της* f, $f|_B : B \to C$ *να είναι αντιστρέψιμος.*



Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $[\vec{x}, \vec{y}]$ του A και εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης τιμής σε κάθε μία από τις f_i. Το θεώρημα αυτό μπορεί να εφαρμοστεί καθώς $f \in C^1$.

$$\exists \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \in [\vec{x}, \vec{y}] - \{\vec{x}, \vec{y}\} :$$

$$f_1(\vec{x}) - f_1(\vec{y}) = \nabla f\big|_{\xi_1} \cdot (\vec{x} - \vec{y})$$

$$f_2(\vec{x}) - f_2(\vec{y}) = \nabla f\big|_{\xi_2} \cdot (\vec{x} - \vec{y})$$

$$\vdots$$

$$f_n(\vec{x}) - f_n(\vec{y}) = \nabla f\big|_{\xi_n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})$$

Γενικότερα μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\forall i \in [n], \exists \xi_i : f_i(\vec{x}) - f_i(\vec{y}) = \sum_{j \in [n]} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_{\xi_i} \cdot (x_j - y_j)$$

όπου x_j, y_j είναι οι j συντεταγμένες των $\vec{x}$ και $\vec{y}$ αντίστοιχα. Από τις παραπάνω σχέσεις, μπορούμε να θεωρήσουμε το $n \cdot n$ γραμμικό σύστημα ως προς $x_j - y_j$:

$$f_1(\vec{x}) - f_1(\vec{y}) = \sum_{j\in[n]} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}\Big|_{\xi_1} \cdot (x_j - y_j)$$

$$f_2(\vec{x}) - f_2(\vec{y}) = \sum_{j\in[n]} \frac{\partial f_2}{\partial x_j}\Big|_{\xi_2} \cdot (x_j - y_j)$$

$$\vdots$$

$$f_n(\vec{x}) - f_n(\vec{y}) = \sum_{j\in[n]} \frac{\partial f_n}{\partial x_j}\Big|_{\xi_n} \cdot (x_j - y_j)$$

το οποίο έχει ορίζουσα:

$$D = det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{\xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{\xi_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\Big|_{\xi_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|_{\xi_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_{\xi_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\Big|_{\xi_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\Big|_{\xi_n} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}\Big|_{\xi_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\Big|_{\xi_n} \end{pmatrix}$$

Εάν τώρα αφήσουμε $\vec{x}, \vec{y} \to \vec{a}$, παρατηρούμε ότι $D \to \mathcal{J}f\big|_{\vec{a}}$, μιάς και $\xi_i \in [\vec{x}, \vec{y}] - \{\vec{x}, \vec{y}\}$· επειδή $\mathcal{J}f\big|_{\vec{a}} = J \neq 0$, υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $J > 0$. Εφαρμόζοντας τους ορισμούς σύγκλισης:

$$\exists r > 0 : \forall \vec{x}, \vec{y} \in S(\vec{a}, r) \cap A : ||D - J|| < J \Rightarrow 0 < D < 2J$$

Δηλαδή υπάρχει μια περιοχή του $\vec{a}$ στην οποία η ορίζουσα D γίνεται διάφορη του μηδενός.

Σε αυτήν την περιοχή $S(\vec{a}, r) \cap A$, για κάθε $\vec{y} \neq \vec{x}$ της περιοχής, εάν $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$, τότε το σύστημά μας έχει λύση την μηδενική. Επειδή $D \neq 0$, η λύση αυτή είναι μοναδική και συνεπώς $x_i = y_i, \forall i \in [n] \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$. Αυτό όμως είναι άτοπο. Οπότε στην περιοχή $S(\vec{a}, r) \cap A$ η f είναι $1 - 1$.

Τελικά, στην περιοχή $B = S(\vec{a}, r) \cap A$ ο περιορισμός της f είναι ενεικονικός. Οπότε αν $C = f(S(\vec{a}, r)) \cap A$, η απεικόνιση $f|_B : B \to C$ είναι $1 - 1$ και επί, άρα αντιστρέψιμη. Αυτό δίνει το ζητούμενο.

Επικαμπύλια και Επιφανειακά ολοκληρώματα

6.1 Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

Έστω γ μια καμπύλη της μορφής $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ η οποία είναι δυνατόν να παραμετριθεί ως $x = x(t), y = y(t)$ για κάθε $t \in [a,b]$. Σε αυτό το κεφάλαιο θα επιχειρίσουμε να προσδιορίσουμε το μήκος μιας τέτοιας καμπύλης γ στο $[a,b]$.

Θεωρούμε λοιπόν μια τομή της κάμπύλης γ σε σημεία $\{\gamma(\alpha) = \gamma(t_1), \gamma(t_2), \cdots, \gamma(t_k) = \gamma(b)\}$ τα οποία έχουν συντεταγμένες $(x(t_i), y(t_i))$. Κάθε 2 διαδοχικά τέτοια σημεία ορίζουν ένα ευθύγραμμο τμήμα που προσεγγίζει τμηματικά την καμπύλη γ. Η πολυγωνική γραμμή λοιπόν:

$$\bigcup_{i\in[k-1]} [\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]$$

επόμενο είναι να προσεγγίζει το μήκος της καμπύλης γ. Δηλαδή το άθροισμα των μηκών των ευθυγράμμων τμημάτων της πολυγωνικής γραμμής θα πρέπει να προσεγγίζει το μήκος της συνεχούς καμπύλης γ. Ισοδύναμα:

$$\mathcal{L}(\gamma) \approx \sum_{i=1}^{k} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i+1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i+1}))^2}$$

Όσο λεπτότερη είναι η τομή της γ, τόσο καλύτερη γίνεται η προσέγγιση. Επιπλέον, εάν x, y είναι παντού (εκτός από αριθμήσιμο πλήθος σημείων) παραγωγίσιμες, μπορεί να βρεθεί ένας συγκεκριμένος τύπος για την εύρεση του μήκους. Συμβολίζουμε με $\delta x_i = x(t_i) - x(t_{i+1})$, με $\delta y_i = y(t_i) - y(t_{i+1})$ και με $\delta t_i = t_i - t_{i+1}$ και γράφουμε την προσέγγιση ισοδύναμα:

$$\sum_{i=1}^{k} \delta t_i \sqrt{\left(\frac{\delta x_i}{\delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\delta y_i}{\delta t_i}\right)^2}$$

Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να λεπτύνουμε την τομή της γ θέτοντας $\delta t_i \to 0$. Αυτό προκύπτει επειδή οι x, y είναι παραγωγίσιμες, άρα και συνεχείς. Επιπλέον, με εκλέπτυνση της τομής, $\frac{\delta x_i}{\delta t_i} \to \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_i}$ και $\frac{\delta y_i}{\delta t_i} \to \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_i}$. Προκύπτει λοιπόν ότι:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \delta t_i \sqrt{\left(\frac{\delta x_i}{\delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\delta y_i}{\delta t_i}\right)^2} = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

(*αυτό βέβαια με την προϋπόθεση ότι το μήκος της γ είναι δυνατόν να προσεγγιστεί τέλεια*)

Όταν x, y είναι παντού παραγωγίσιμες με συνεχείς παραγώγους, το $\mathcal{L}(\gamma)$ είναι τέλεια προσεγγίσιμο. Αυτό επειδή y' συνεχής, για $[t_i, t_{i+1}]$ κατάλληλου (μικρού) μήκους, η y' φραγμένη. Εάν τώρα $\overset{\wedge}{y'} = sup\{y'(t), t \in [t_i, ti+1]\}$ και $\overset{\vee}{y'} = inf\{y'(t), t \in [t_i, t_{i+1}]\}$, από το 'Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής':

$$\exists \bar{t}_i, \bar{t}_{i+1} : y(\bar{t}_i) = \overset{\vee}{y'} \text{ και } y(\bar{t}_{i+1}) = \overset{\wedge}{y'}$$

Θεωρούμε την y' στο $[\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}]$. Επειδή y' συνεχής, θα υπάρχει συνάρτηση $\varepsilon_y(\delta) \xrightarrow{\delta\to 0} 0$ τέτοια ώστε:

$$\overbrace{y'(\bar{t}_{i+1})}^{\overset{\wedge}{y'}} - \overbrace{y'(\bar{t}_i)}^{\overset{\vee}{y'}} = \varepsilon_y(\delta t_i)$$

Μικραίνοντας τώρα το διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$ σε $[t'_i, t'_{i+1}]$ έτσι ώστε να περιέχεται στο $[\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}]$, παρατηρούμε ότι θα πρέπει το νέο διάστημα $[\bar{t'}_i, \bar{t'}_i]$ να είναι μικρότερου μήκους από το $[\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}]$. Από την παραπάνω σχέση, έπεται ότι $\overset{\wedge}{y'} \to \overset{\vee}{y'}$. Επειδή $\overset{\wedge}{y'} \to \overset{\vee}{y'}$, μπορούμε να θεωρίσουμε ότι για λεπτή διαμέριση των t, είτε κάποιο από αυτά είναι 0, είτε και τα 2 είναι ομόσημα. Αυτό γιατί εάν (για παράδειγμα) σε μία περιοχή $[t_i, t_{i+1}]$ το $\overset{\vee}{y'} < 0$ και το $\overset{\wedge}{y'} > 0$, λόγω της συνέχειας της y', θα υπάρχει περιοχή $[\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}] \subseteq [t_i, t_{i+1}]$ γύρω του $\overset{\vee}{y'}$ με $y' \leq 0$, οπότε σε αυτό το διάστημα, $\overset{\vee}{y'} < 0$ και το νέο *supremum* αυτού του διαστήματος $\overset{\wedge}{y'}$ θα είναι $\overset{\wedge}{y'} \leq 0$. Ίδιο επιχείρημα μπορεί να εφαρμοστεί και για την συνάρτηση x'. Χωρίς βλάβη της γενικότητας λοιπόν, για κάθε αρκετά λεπτή διαμέριση των t, κάθε διάστημα έχει ομόσημα $\overset{\wedge}{y'}, \overset{\vee}{y'}$, ή κάποιο από αυτά 0 και αντίστοιχα ομόσημα $\overset{\wedge}{x'}, \overset{\vee}{x'}$, ή κάποιο από αυτά 0. Οπότε είναι δυνατόν να παρθεί η ακόλουθη σχέση:

$$\sum_{i \in [k]} \delta t_i \sqrt{min\left\{\overset{\wedge}{x'}^2, \overset{\vee}{x'}^2\right\} + min\left\{\overset{\wedge}{y'}^2, \overset{\vee}{y'}^2\right\}} \leq \sum_{i \in [k]} \delta t_i \sqrt{\left(\frac{\delta x_i}{\delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\delta y_i}{\delta t_i}\right)^2} \leq$$

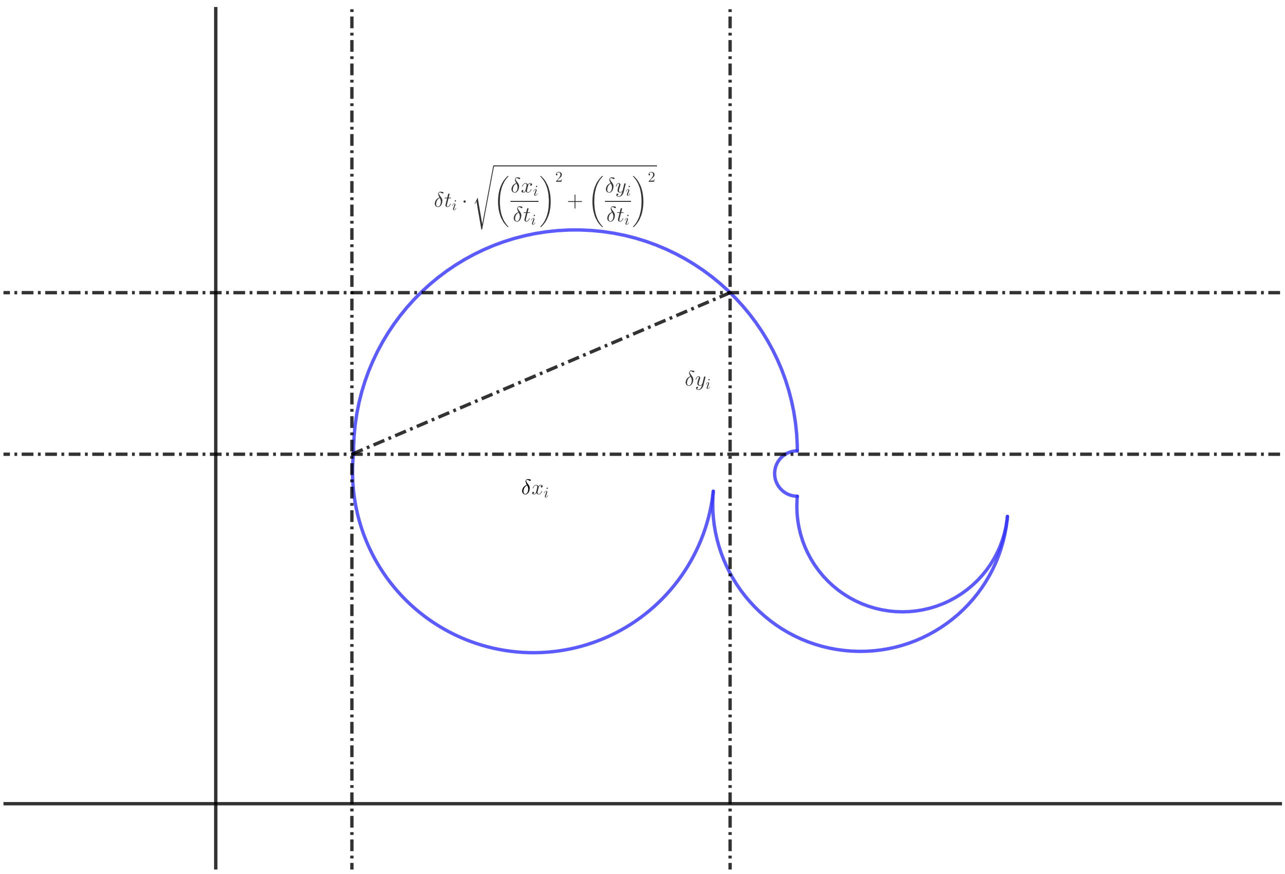
$$\leq \sum_{i \in [k]} \delta t_i \sqrt{max\left\{\overset{\wedge}{x'}^2, \overset{\vee}{x'}^2\right\} + max\left\{\overset{\wedge}{y'}^2, \overset{\vee}{y'}^2\right\}}$$

Επειδή κάθε όρος του κάτω αθροίσματος τείνει σε κάθε όρο του άνω αθροίσματος, θα έχουμε ότι:

$$\sum_{i \in [k]} \delta t_i \sqrt{min\left\{\overset{\wedge}{x'}^2, \overset{\vee}{x'}^2\right\} + min\left\{\overset{\wedge}{y'}^2, \overset{\vee}{y'}^2\right\}} \to \sum_{i \in [k]} \delta t_i \sqrt{max\left\{\overset{\wedge}{x'}^2, \overset{\vee}{x'}^2\right\} + max\left\{\overset{\wedge}{y'}^2, \overset{\vee}{y'}^2\right\}}$$

και συνεπώς, εξ ορισμού της ολοκληρωσιμότητας:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$



Έχοντας πει αυτά, μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του επικαμπύλιου ολοκληρώματος. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα θα είναι ένας τρόπος σε κάθε σημείο της καμπύλης γ να δώσουμε μια τιμή 'μάζας' και έπειτα να υπολογίσουμε την συνολική 'μάζα' της καμπύλης γ.

Ορισμός: Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα:
1. Απλή μορφή του Επικαμπυλίου ολοκληρώματος: Έστω καμπύλη $C^1 \ni \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *με παραμέτριση* $x = x(t), y = y(t)$ *και συνάρτηση* $C^1 \ni f : \{\vec{x} \in \mathbb{R} \mid \exists t \in [a,b] : \vec{x} = \gamma(t)\} \to \mathbb{R}$. *Ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της* f *στο* γ *ορίζουμε το ολοκλήρωμα:*

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

2. Διανυσματική μορφή του Επικαμπυλίου ολοκληρώματος: Παραποιώντας τον παραπάνω ορισμό, θεωρούμε $r(t) = (x(t), y(t))$ *την παραμέτριση της καμπύλης* γ *και επίσης μια συνάρτηση* $C^1 \ni F = (P, Q) : \{(x(t), y(t)) \in \gamma\} \to \mathbb{R}^2$, *όπου η* P *είναι η μάζα που δίδεται στα* x *και* Q *η μάζα που δίδεται στα* y. *Τα στοιχειώδη ευθύγραμμα τμήματα που προσεγγίζουν εδώ τμηματικά την* γ *είναι της μορφής* dr. *Η μάζα σε καθένα από αυτά, εξ ορισμού της* F, *θα πρέπει να είναι* $F(r(t)) \cdot dr$. *Επομένως, αθροίζοντας όλες τις μάζες, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ισοδύναμα γίνεται:*

$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt$$

Συμβολισμός: Διαφορική μορφή του Επικαμπυλίου ολοκληρώματος:
Έστω $r(t) = (x(t), y(t))$ *μία παραμέτριση της καμπύλης* γ *και* $C^1 \ni F = (P, Q) : \{(x(t), y(t)) \in \gamma\} \to \mathbb{R}^2$ *μία συνάρτηση μάζας της* γ. *Συμβολίζουμε:*

$$\int_\gamma F \cdot dr =: \int_\gamma P dx + Q dy$$

Πόρισμα: Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα Καμπύλης - Συνάρτησης:
Έστω καμπύλη $C^1 \ni \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *η οποία είναι συνάρτηση του* x, *και συνεπώς παραμετρείται ως* $x, y(x)$ *με* $x \in [a,b]$. *Τότε, εάν* $C^1 \ni f : \gamma \to \mathbb{R}$, *το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της* f *στην* γ *είναι ακριβώς:*

$$\int_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Το πόρισμα προκύπτει άμεσα από τον ορισμό: ''Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα, *1. Απλή μορφή του Επικαμπυλίου ολοκληρώματος*''.

6.2 Επιφανειακά Ολοκληρώματα

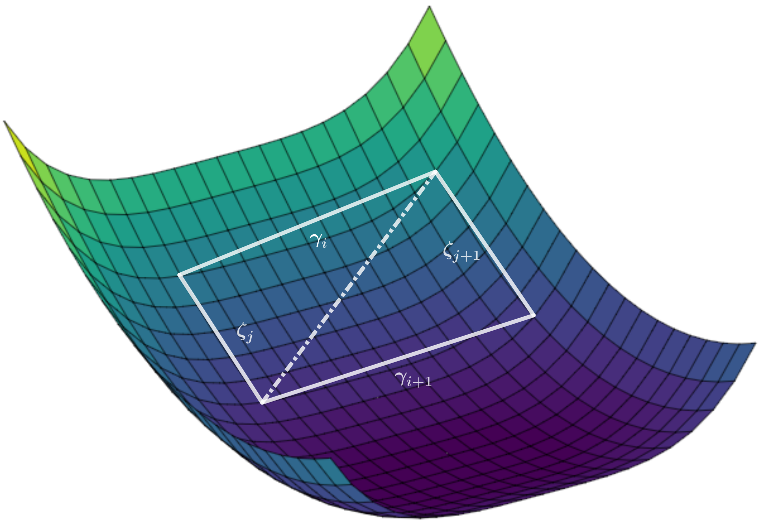
Έστω επιφάνεια $\Theta \subset \mathbb{R}^3$, $\mathcal{E}_{a,y}$ το επίπεδο $x = a$ & $y, z \in \mathbb{R}$ και $\mathcal{E}_{x,b}$ το επίπεδο $x, z \in \mathbb{R}$ & $y = b$. Σε αυτό το κεφάλαιο θα προσδιορίσουμε το παράπλευρο εμβαδόν μιας τέτοιας επιφάνειας Θ.

Θεωρούμε τις καμπύλες γ_i, ζ_j οι οποίες προκύπτουν από την τομή της επιφάνειας Θ με τα επίπεδα $\mathcal{E}_{x,b_i}$ και $\mathcal{E}_{a_j,y}$ αντίστοιχα, όπου a_i, b_i είναι στοιχεία αύξοντων πραγματικών ακολουθιών, με $x(t)$, $y = b_i$, ${}^{\gamma}z_i(t) = z(t, b_i)$ να είναι μια παραμέριση των γ_i και $x = a_i$, $y(s)$, ${}^{\zeta}z_j(a_j, s)$ να είναι μια παραμέριση των ζ_j.

Όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο προσεγγίζαμε το μήκος των καμπυλών με ευθύγραμμα τμήματα, εδώ θα προσεγγίσουμε το εμβαδόν των καμπυλών χρησημοποιώντας τετράπλευρα. Συγκεκριμένα, μπορούμε να διαλέξουμε αρκετά μεγάλο πλήθος επιπέδων $\mathcal{E}_{x,b_i}$ και να χωρίσουμε την επιφάνεια Θ σε λορίδες παράλληλες του άξονα x. Αντίστοιχα, με αρκετά μεγάλο πλήθος επιπέδων $\mathcal{E}_{a_i,y}$ μπορούμε να χωρίσουμε την επιφάνεια Θ σε λορίδες παράλληλες του άξονα y. Ουσιαστικά εδώ διαμερίζουμε σε παραλληλόγραμμα το χωρίο−προβολή της Θ στο επίπεδο x, y και επεκτείνουμε την διαμέριση αυτή σε ύψος, ώστε να διαμερίζει και την επιφάνεια Θ. Με αυτόν τον τρόπο, η επιφάνεια Θ θα προσεγγίζεται από τετράπλευρα που ορίζονται από τα εξής 4 σημεία:

1. Από το σημείο $\gamma_i \wedge \zeta_j = \big(x(t_k) = \alpha_j, b_i = y(s_k), {}^{\gamma}z_i(t_k) = {}^{\zeta}z_j(s_k)\big)$ που είναι η τομή της καμπύλης γ_i με την ζ_j
2. Από το σημείο $\gamma_i \wedge \zeta_{j+1} = \big(x(t_{k+1}) = \alpha_{j+1}, b_i = y(s_k), {}^{\gamma}z_i(t_{k+1}) = {}^{\zeta}z_{j+1}(s_k)\ \big)$ που είναι η τομή της καμπύλης γ_i με την ζ_{j+1}
3. Από το σημείο $\gamma_{i+1} \wedge \zeta_j = \big(x(t_k) = \alpha_j, b_{i+1} = y(s_{k+1}), {}^{\gamma}z_{i+1}(t_k) = {}^{\zeta}z_j(s_{k+1})\big)$ που είναι η τομή της καμπύλης γ_{i+1} με την ζ_j
4. Από το σημείο $\gamma_{i+1} \wedge \zeta_{j+1} = \big(x(t_{k+1}) = \alpha_{j+1}, b_{i+1} = y(s_{k+1}), {}^{\gamma}z_{i+1}(t_{k+1}) = {}^{\zeta}z_{j+1}(s_{k+1})\big)$ που είναι η τομή της καμπύλης γ_{i+1} με την ζ_{j+1}

Θα συμβολίζουμε το εμβαδόν κάθε τέτοιου τετραπλεύρου με $\mathcal{T}(i, j)$.



Είναι εμφανές ότι κάθε τέτοιο τετράπλευρο προσεγγίζει τοπικά το εμβαδόν της επιφάνειας Θ. Το σύνολο λοιπόν των τετραπλεύρων αυτών θα πρέπει να προσεγγίζει το συνολικό εμβαδόν της επιφάνειας. Δηλαδή, εάν $\mathcal{A}(\Theta)$ είναι το εμβαδόν της επιφάνειας έχουμε ότι:

$$\mathcal{A}(\Theta) \approx \sum_{i\in[n]} \sum_{j\in[m]} \mathcal{T}(i, j)$$

Αρκεί λοιπόν να υπολογιστεί ένας γενικός τύπος για τον υπολογισμό του $\mathcal{T}(i, j)$. Για τον σκοπό αυτό χωρίζουμε κάθε τετράπλευρο σε 2 τρίγωνα, εκ των οποίων το ένα ορίζεται από τα σημεία:

$$\gamma_i \wedge \zeta_j, \gamma_i \wedge \zeta_{j+1}, \gamma_{i+1} \wedge \zeta_j$$

και το άλλο από τα σημεία:

$$\gamma_i \wedge \zeta_{j+1}, \gamma_{i+1} \wedge \zeta_j, \gamma_{i+1} \wedge \zeta_{j+1}$$

Θεωρούμε επιπλέον το $\overline{\gamma_i \wedge \zeta_j, \gamma_i \wedge \zeta_{j+1}}$ να είναι το διάνυσμα με αρχή $\gamma_i \wedge \zeta_j$ και πέρας $\gamma_i \wedge \zeta_{j+1}$, το $\overline{\gamma_i \wedge \zeta_j, \gamma_{i+1} \wedge \zeta_j}$ να είναι το διάνυσμα με αρχή $\gamma_i \wedge \zeta_j$ και πέρας $\gamma_{i+1} \wedge \zeta_j$, το $\overline{\gamma_{i+1} \wedge \zeta_j, \gamma_{i+1} \wedge \zeta_{j+1}}$ να είναι το διάνυσμα με αρχή $\gamma_{i+1} \wedge \zeta_j$ και πέρας $\gamma_{i+1} \wedge \zeta_{j+1}$ και το $\overline{\gamma_{i+1} \wedge \zeta_{j+1}, \gamma_i \wedge \zeta_{j+1}}$ να είναι το διάνυσμα με αρχή $\gamma_{i+1} \wedge \zeta_{j+1}$ και πέρας $\gamma_i \wedge \zeta_{j+1}$.

Από την αναλυτική γεωμετρία μπορούμε να βρούμε ότι το εμβαδόν του πρώτου τριγώνου θα είναι:

$$\frac{1}{2} \cdot \left|\left| \overline{\gamma_i \wedge \zeta_j, \gamma_i \wedge \zeta_{j+1}} \times \overline{\gamma_i \wedge \zeta_j, \gamma_{i+1} \wedge \zeta_j} \right|\right| =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left|\left| \big(x(t_{k+1}) - x(t_k), b_i - b_i, {}^\gamma z_i(t_{k+1}) - {}^\gamma z_i(t_k)\big) \times \big(a_j - a_j, y(s_{k+1}) - y(s_k), {}^\zeta z_j(s_{k+1}) - {}^\zeta z_j(s_k)\big) \right|\right| =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left|\left| \begin{vmatrix} 0 & {}^\gamma z_i(t_{k+1}) - {}^\gamma z_i(t_k) \\ y(s_{k+1}) - y(s_k) & {}^\zeta z_j(s_{k+1}) - {}^\zeta z_j(s_k) \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x(t_{k+1}) - x(t_k) & {}^\gamma z_i(t_{k+1}) - {}^\gamma z_i(t_k) \\ 0 & {}^\zeta z_j(s_{k+1}) - {}^\zeta z_j(s_k) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x(t_{k+1}) - x(t_k) & 0 \\ 0 & y(s_{k+1}) - y(s_k) \end{vmatrix} \right|\right| =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\Big(\big(y(s_{k+1}) - y(s_k)\big)\big({}^\gamma z_i(t_{k+1}) - {}^\gamma z_i(t_k)\big)\Big)^2 + \Big(\big(x(t_{k+1}) - x(t_k)\big)\big({}^\zeta z_j(s_{k+1}) - {}^\zeta z_j(s_k)\big)\Big)^2 + \Big(\big(x(t_{k+1}) - x(t_k)\big)\big(y(s_{k+1}) - y(s_k)\big)\Big)^2}$$

Ομοίως, το εμβαδόν του δεύτερου τριγώνου θα είναι:

$$\frac{1}{2} \cdot \left|\left| \overline{\gamma_{i+1} \wedge \zeta_{j+1}, \gamma_i \wedge \zeta_{j+1}} \times \overline{\gamma_{i+1} \wedge \zeta_j, \gamma_{i+1} \wedge \zeta_{j+1}} \right|\right| =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left|\left| \big(a_{j+1} - a_{j+1}, y(s_{k+1}) - y(s_k), {}^\gamma z_{j+1}(t_{k+1}) - {}^\gamma z_{j+1}(t_k)\big) \times \big(x(t_{k+1}) - x(t_k), b_{i+1} - b_{i+1}, {}^\zeta z_{j+1}(s_{k+1}) - {}^\zeta z_{j+1}(s_k)\big) \right|\right| =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left|\left| \begin{vmatrix} y(s_{k+1}) - y(s_k) & {}^\zeta z_{j+1}(s_{k+1}) - {}^\zeta z_{j+1}(s_k) \\ 0 & {}^\gamma z_{j+1}(t_{k+1}) - {}^\gamma z_{i+1}(t_k) \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & {}^\zeta z_{j+1}(s_{k+1}) - {}^\zeta z_{j+1}(s_k) \\ x(t_{k+1}) - x(t_k) & {}^\gamma z_{j+1}(t_{k+1}) - {}^\gamma z_{i+1}(t_k) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & y(t_{k+1}) - y(t_k) \\ x(t_{k+1}) - x(t_k) & 0 \end{vmatrix} \right|\right| =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\Big(\big(y(s_{k+1}) - y(s_k)\big)\big({}^\gamma z_{i+1}(t_{k+1}) - {}^\gamma z_{i+1}(t_k)\big)\Big)^2 + \Big(\big({}^\zeta z_{j+1}(s_{k+1}) - {}^\zeta z_{j+1}(s_k)\big)\big(x(t_{k+1}) - x(t_k)\big)\Big)^2 + \Big(\big(y(s_{k+1}) - y(s_k)\big)\big(x(t_{k+1}) - x(t_k)\big)\Big)^2}$$

Οπότε η προσέγγιση του εμβαδού της Θ ισοδύναμα γίνεται:

$$\mathcal{A}(\Theta) \approx \frac{1}{2} \sum_{i \in [n]} \sum_{j \in [m]} \sqrt{\Big(\big(y(s_{k+1}) - y(s_k)\big)\big({}^\gamma z_i(t_{k+1}) - {}^\gamma z_i(t_k)\big)\Big)^2 + \Big(\big(x(t_{k+1}) - x(t_k)\big)\big({}^\zeta z_j(s_{k+1}) - {}^\zeta z_j(s_k)\big)\Big)^2 + \Big(\big(x(t_{k+1}) - x(t_k)\big)\big(y(s_{k+1}) - y(s_k)\big)\Big)^2} + \sqrt{\Big(\big(y(t_{k+1}) - y(t_k)\big)\big({}^\zeta z_{j+1}(s_{k+1}) - {}^\zeta z_{j+1}(s_k)\big)\Big)^2 + \Big(\big({}^\gamma z_{i+1}(t_{k+1}) - {}^\gamma z_{i+1}(t_k)\big)\big(x(t_{k+1}) - x(t_k)\big)\Big)^2 + \Big(\big(y(s_{k+1}) - y(s_k)\big)\big(x(t_{k+1}) - x(t_k)\big)\Big)^2}$$

Όσο λεπτότερη παίρνεται η διαμέριση της επιφάνειας Θ, τόσο καλύτερη γίνεται η προσέγγιση. Επιπλέον, εάν οι παραμετρίσεις είναι παντού παραγωγίσιμες (εκτός από αριθμήσιμο πλήθος σημείων), μπορεί να βρεθεί ένας συγκεκριμένος τύπος για την εύρεση του παράπλευρου εμβαδού. Για ευκολία στην διατύπωση, συμβολίζουμε:

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) - x(t_k) &= \delta x_k \\ y(s_{k+1}) - y(s_k) &= \delta y_k \\ {}^\gamma z_h(t_{k+1}) - {}^\gamma z_h(t_k) &= {}^\gamma \delta_h z_k \\ {}^\zeta z_h(s_{k+1}) - {}^\zeta z_h(s_k) &= {}^\zeta \delta_h z_k \\ t_{k+1} - t_k &= \delta t_k \\ s_{k+1} - s_k &= \delta s_k \end{aligned}$$

και γράφουμε την προσέγγιση ισοδύναμα ως:

$$\frac{1}{2}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in[m]}\delta t_k\delta s_k\sqrt{\left(\frac{\delta y_k}{\delta s_k}\cdot\frac{{}^{\gamma}\delta_i z_k}{\delta t_k}\right)^2+\left(\frac{\delta x_k}{\delta t_k}\cdot\frac{{}^{\zeta}\delta_j z_k}{\delta s_k}\right)^2+\left(\frac{\delta y_k}{\delta s_k}\cdot\frac{\delta x_k}{\delta t_k}\right)^2}+ \\ +\sqrt{\left(\frac{\delta y_k}{\delta s_k}\cdot\frac{{}^{\gamma}\delta_{i+1} z_k}{\delta t_k}\right)^2+\left(\frac{\delta x_k}{\delta t_k}\cdot\frac{{}^{\zeta}\delta_{j+1} z_k}{\delta s_k}\right)^2+\left(\frac{\delta x_k}{\delta t_k}\cdot\frac{\delta y_k}{\delta s_k}\right)^2}$$

Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να λεπτύνουμε την τομή της Θ θέτοντας $\delta t_k, \delta s_k \to 0$. Αυτό προκύπτει επειδή οι παραμετρίσεις είναι παραγωγίσιμες, άρα και συνεχείς. Επιπλέον, με εκλέπτυνση της τομής, $\frac{\delta x_k}{\delta t_k} \to \frac{\partial x}{\partial t}$ και $\frac{\delta y_k}{\delta s_k} \to \frac{\partial y}{\partial s}$ και $\frac{{}^{\gamma}\delta_i z_k}{\delta t_k}, \frac{{}^{\gamma}\delta_{i+1} z_k}{\delta t_k} \to \frac{\partial z}{\partial t}$ και $\frac{{}^{\zeta}\delta_j z_k}{\delta s_k}, \frac{{}^{\zeta}\delta_{j+1} z_k}{\delta s_k} \to \frac{\partial z}{\partial t}$. Προκύπτει με αυτά λοιπόν ότι:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\Theta) &= \lim_{k\to\infty}\sum_{t_k\in[p,q]}\sum_{s_k\in[b,d]}\delta t_k\delta s_k\sqrt{\left(\frac{\delta y_k}{\delta s_k}\cdot\frac{{}^{\gamma}\delta_i z_k}{\delta t_k}\right)^2+\left(\frac{\delta x_k}{\delta t_k}\cdot\frac{{}^{\zeta}\delta_j z_k}{\delta s_k}\right)^2+\left(\frac{\delta y_k}{\delta s_k}\cdot\frac{\delta x_k}{\delta t_k}\right)^2} \\ &= \iint_{[p,q]\times[b,d]}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2}dsdt\end{aligned}$$

(*με την προϋπόθεση βέβαια ότι το παράπλευρο εμβαδόν είναι τέλεια προσεγγίσιμο*)

Όταν οι παραμετρίσεις είναι παντού παραγωγίσιμες με συνεχείς μερικές παραγώγους, τότε το $\mathcal{A}(\Theta)$ είναι τέλεια προσεγγίσιμο. Αυτό προκύπτει ακριβώς όπως στην περίπτωση των επιφανειακών ολοκληρωμάτων, μόνο που εδώ χρειάζεται να ληφθούν υπ' όψιν ακόμη 2 συναρτήσεις, οι $\frac{\partial z}{\partial t}$ και $\frac{\partial z}{\partial s}$.

Έχοντας πει αυτά, μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του επιφανειακού ολοκληρώματος. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα είναι ένας τρόπος σε κάθε σημείο της επιφάνειας Θ να δώσουμε μία τιμή 'μάζας' και έπειτα να υπολογίσουμε την συνολική μάζα της επιφάνειας Θ.

Ορισμός: Επιφανειακό Ολοκλήρωμα:
1. *Απλή μορφή του Επιφανειακού ολοκληρώματος: Έστω επιφάνεια $\Theta \subset \mathbb{R}^3$ με τις εν C^1 παραμετρίσεις $x = x(t), y = y(s), z = z(t,s), (t,s) \in [p,q]\times[b,d]$ (όπως στην εισαγωγή) και συνάρτηση $C^1 \ni f : \Theta \to \mathbb{R}$. Ως επιφανειακό ολοκλήρωμα της f στην Θ ορίζουμε το ολοκλήρωμα:*

$$\iint_{[p,q]\times[b,d]} f(x(t,s),y(t,s),z(t,s))\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2}dsdt$$

2. *Διανυσματική μορφή του Επιφανειακού ολοκληρώματος: Θεωρούμε $v(t,s) = (x(t,s),y(t,s),z(t,s))$ και $v_1(t,s) = (x(t,s),y(t,s)), v_2(t,s) = (y(t,s),z(t,s)), v_3(t,s) = (x(t,s),z(t,s))$ την παραμέτριση της επιφάνειας Θ και επίσης μια συνάρτηση $C^1 \ni F = (P,Q,R) : \Theta \to \mathbb{R}^3$, όπου η P είναι η μάζα που δίδεται στα x, Q η μάζα που δίδεται στα y και R η μάζα που δίνεται στο z. Τα στοιχειώδη τετράπλευρα που προσεγγίζουν εδώ τμηματικά την Θ είναι της μορφής da. Η μάζα σε καθένα από αυτά, εξ ορισμού της F, θα πρέπει να είναι $F(u(t,s))\cdot da$. Επομένως, αθροίζοντας όλες τις μάζες, το επιφανειακό ολοκλήρωμα ισοδύναμα γίνεται:*

$$\iint_\Theta F\cdot da = \int_p^q\int_b^d F(v(t,s))\cdot(det\mathcal{J}v_1\big|_{t,s}, det\mathcal{J}v_2\big|_{t,s}, det\mathcal{J}v_3\big|_{t,s})dsdt$$

Συμβολισμός: Διαφορική μορφή του Επιφανειακού ολοκληρώματος:
Έστω $v(t,s) = (x(t,s),y(t,s),z(t,s))$ μία παραμέτριση της επιφάνειας Θ και $C^1 \ni F = (P,Q,R) : \Theta \to \mathbb{R}^3$ μία συνάρτηση μάζας της Θ. Συμβολίζουμε:

$$\iint_\Theta F\cdot dv =: \iint_\Theta Pdxdy + Qdydz + Rdzdx$$

Παρατήρηση: Μορφή των παραμετρίσεων του ορισμού "Επιφανειακό ολοκλήρωμα, 2.":
Ο τύπος που προέκυψε από την μέθοδο της εισαγωγής και παρουσιάζεται στον ορισμό "Επιφανειακό ολοκλήρωμα, 2. Διανυσματική μορφή του Επιφανειακού ολοκληρώματος" δεν ισχύει για όλων των ειδών τις παραμετρίσεις, παρά μόνο για αυτές για τις οποίες στις οποίες το x είναι μόνο συνάρτηση του t και το y μόνο συνάρτηση του s, όπως φαίνεται στην 2^η παράγραφο της εισαγωγής.

Αντίθετα, εάν v_1, v_2, v_3 είναι όπως στον ορισμό "Επιφανειακό ολοκλήρωμα, 2. Διανυσματική μορφή του Επιφανειακού ολοκληρώματος", ο τύπος:

$$\iint_\Theta F \cdot da = \int_p^q \int_b^d F(v(t,s)) \cdot (det\mathcal{J}v_1\big|_{t,s}, det\mathcal{J}v_2\big|_{t,s}, det\mathcal{J}v_3\big|_{t,s})dsdt$$

είναι γενικός (για κάθε είδος παραμέτρισης). Ο αντίστοιχος γενικός τύπος για τον ορισμό: "Επιφανειακό Ολοκλήρωμα, 1. Απλή μορφή του Επιφανειακού ολοκληρώματος" θα ήταν:

$$\iint_{[p,q]\times[b,d]} f(x(t,s), y(t,s), z(t,s)) \cdot \sqrt{\left(det\mathcal{J}v_1\big|_{t,s}\right)^2 + \left(det\mathcal{J}v_2\big|_{t,s}\right)^2 + \left(det\mathcal{J}v_3\big|_{t,s}\right)^2} dsdt$$

Πόρισμα: Επιφανειακό Ολοκλήρωμα Επιφάνειας - Συνάρτησης:
Έστω επιφάνεια $\Theta \subset \mathbb{R}^3$ η οποία είναι συνάρτηση των x, y, και συνεπώς παραμετρείται ως $x, y, z(x, y)$ με $(x, y) \in [p, q] \times [b, d]$. Τότε, εάν $C^1 \ni f : \Theta \to \mathbb{R}$, το επιφανειακό ολοκλήρωμα της f στην Θ είναι ακριβώς:

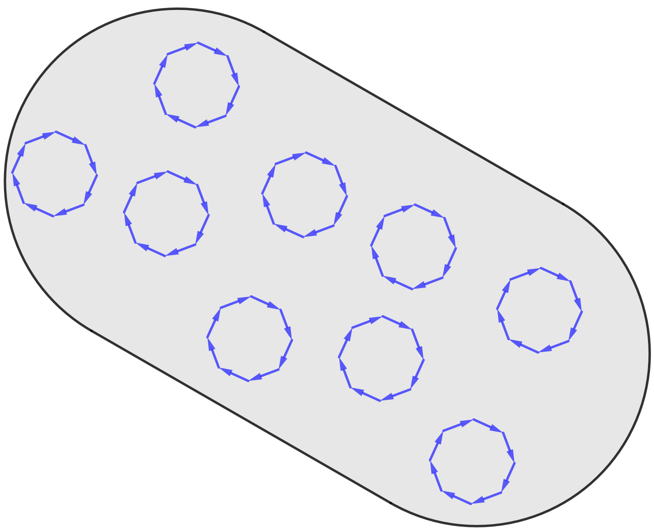
$$\iint_{[p,q]\times[b,d]} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

Το πόρισμα προκύπτει άμεσα από τον ορισμό: "Επιφανειακό Ολοκλήρωμα, *1. Απλή μορφή του Επιφανειακού ολοκληρώματος*".

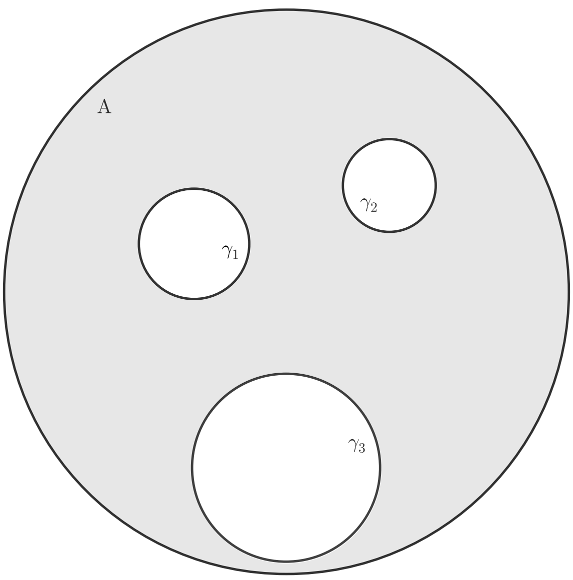
Θεωρήματα Ροών

7.1 Θεώρημα του Green

Το Θεώρημα του *Green* μας εκφράζει ουσιαστικά ότι μικρές αλλαγές στο εσωτερικό ενός (συγκεκριμένου είδους) συνόλου επιρρεάζουν τις αλλαγές στο σύνορό του. Συγκεκριμένα, το σύνολο των αλλαγών στο εσωτερικό του συνόλου ισούται με το σύνολο των αλλαγών στο συνορό του. Για παράδειγμα, η στροβιλώδης ροή ενός ρευστού σε ένα συνόλου εμφανίζει μια τέτοια συμπεριφορά. Το αποτέλεσμα της ροής στο εσωτερικό του συνόλου έχει αντίκτυπο στο σύνορό του.



Ορισμός: Ομαλό Σύνορο:
Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *ένα συνεκτικό σύνολο. Θα λέμε ότι το* A *έχει ομαλό σύνορο εάν το σύνορο* ∂A *αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος μη αυτοτεμνόμενων καμπυλών* $\gamma_i(t) = (x_i(t), y_i(t)) \in C^1$



Ένα σύνολο με ομαλό σύνορο ∂A

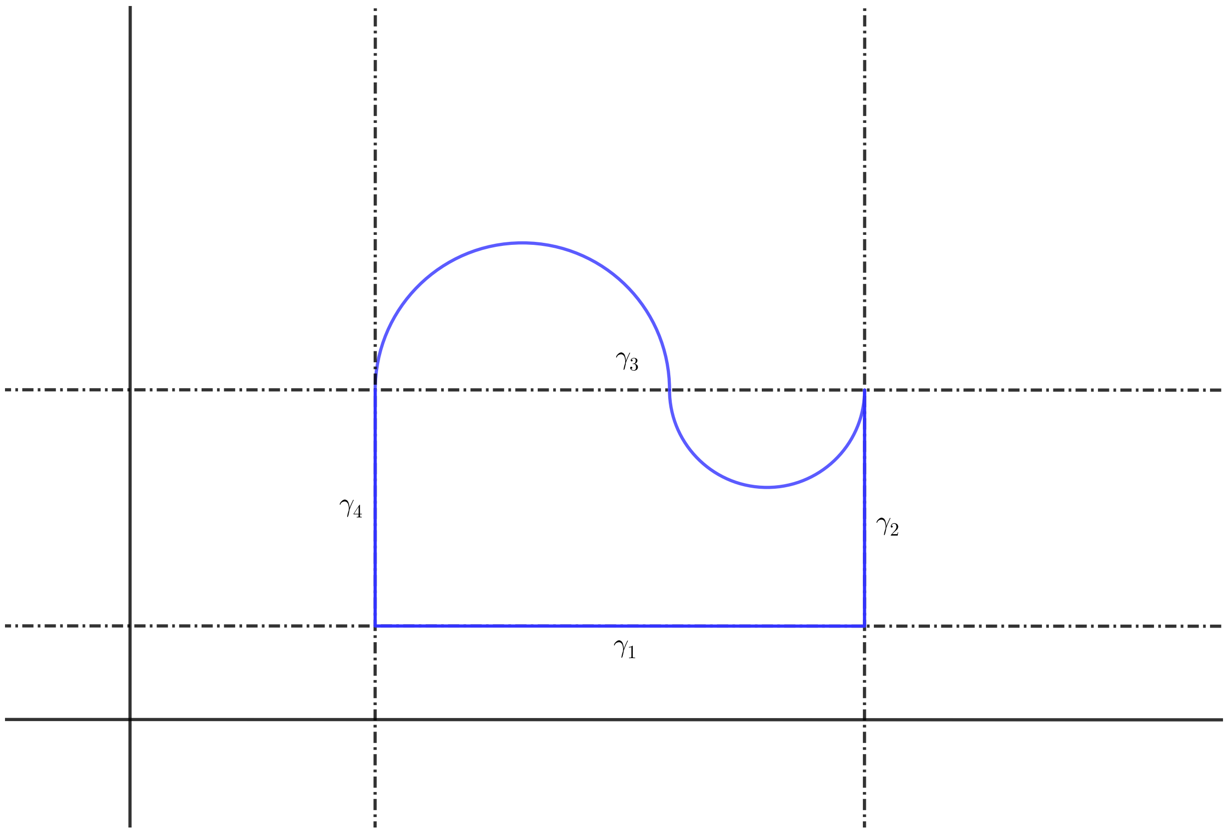
Θεώρημα: Θεώρημα του *Green*:
Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ με ομαλό σύνορο ∂A. Τότε, για τις συναρτήσεις $P, Q \in C^1$ με $P = P(x,y), Q = Q(x,y) : A \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\int_{\partial A} Pdx + Qdy = \iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\ dxdy$$

Αρχικά θα επιχειρήσουμε να αποδείξουμε το θεώρημα αυτό για σύνολα της μορφής $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < g(x)\}, C^1 \ni g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Για τον σκοπό αυτό χωρίζουμε το σύνορο ∂A στις εξής 4 καμπύλες:

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \gamma_1(t) = (t,c) \\
&\gamma_2 : [c,g(b)] \to \mathbb{R}^2, \gamma_2(t) = (b,t) \\
&\gamma_3 : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \gamma_3(t) = (t,g(t)) \\
&\gamma_4 : [c,g(a)] \to \mathbb{R}^2, \gamma_4(t) = (a,t)
\end{aligned}$$

Η γ_1 έχει κατεύθυνση από αριστερά $\to$ δεξιά. Η γ_2 έχει κατεύθυνση από κάτω $\to$ πάνω. Η γ_3 έχει κατεύθυνση από αριστερά $\to$ δεξιά. Η γ_4 έχει κατεύθυνση από κάτω $\to$ πάνω.



Με τον διαχωρισμό αυτόν προκύπτει ότι:

$$\int_{\partial A} Pdx = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_3} Pdx = \int_{\gamma_1} Pdx + \int_{\gamma_3} Pdx = \int_a^b P(t,c)dt - \int_a^b P(t,g(t))dt$$

Εάν τώρα μελετήσουμε το ολοκλήρωμα $\iint_A \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$, παρατηρούμε ότι:

$$\iint_A \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b \int_c^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b P(x,g(x)) - P(x,c)\ dx = -\left(\int_a^b P(t,c)dt - \int_a^b P(t,g(t))dt \right)$$

Δηλαδή ισχύει η ισότητα:

$$\int_{\partial A} Pdx = -\iint_A \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

Θα δείξουμε ότι ανάλογο συμπέρασμα προκύπτει και για τα ολοκληρώματα της Q. Συγκεκριμένα, έχουμε ότι:

$$\int_{\partial A} Qdy = \int_{\bigcup_{i \in [4]} \gamma_i} Qdy = \int_{\gamma_1} Qdy + \int_{\gamma_2} Qdy - \int_{\gamma_3} Qdy - \int_{\gamma_4} Qdy =$$

$$\int_c^{g(b)} Q(b,t)dt - \int_a^b Q(t,g(t))g'(t)dt - \int_c^{g(a)} Q(a,t)dt$$

Σε αυτό το σημείο δεν είναι δυνατόν να προχωρίσουμε περισσότερο. Γι' αυτό θα κάνουμε την ακόλουθη παρατήρηση: Η $\int_c^{g(x)} Q(x,y)dy$ είναι μία συνάρτηση της μορφής $\bar{Q}(x,*) = \int_c^{*} Q(x,y)dy$. Οπότε:

$$\int_c^{g(x)} Q(x,y)dy = \bar{Q}(x,g(x))$$

ή αλλιώς $\bar{Q} \circ \bar{g}(x)$, εάν θεωρήσουμε $\bar{g} = (x, g(x))$. Παραγωγίζοντας την παραπάνω σύνθεση πλέον, έχουμε ότι:

$$\frac{d\bar{Q} \circ \bar{g}}{dx} = \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y}\Big|_g \cdot \frac{dg}{dx} = \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} + Q(x,g(x)) \cdot g'(x) = \int_c^{g(x)} \frac{\partial Q}{\partial x} dy + Q(x,g(x)) \cdot g'(x)$$

Έχοντας στο νου μας την σχέση στην οποία σταματήσαμε για λίγο, εάν ολοκληρώσουμε ως προς x από a έως b την τελευταία σχέση που βρήκαμε, προκύπτει ότι:

$$\int_a^b \frac{d\bar{Q} \circ \bar{g}}{dx}\, dx = \int_a^b \int_c^{g(x)} \frac{\partial Q}{\partial x} dydx + \int_a^b Q(x,g(x)) \cdot g'(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b Q(b,y)dy - \int_a^b Q(a,y)dy = \iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} dydx + \int_a^b Q(x,g(x)) \cdot g'(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_c^{g(b)} Q(b,t)dt - \int_a^b Q(t,g(t))g'(t)dt - \int_c^{g(a)} Q(a,t)dt = \iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} dydx \Leftrightarrow$$

$$\int_{\partial A} Qdy = \iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} dydx$$

Τελικά, το Θεώρημα του $Green$ ισχύει για σύνολα της μορφής $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < g(x)\}, C^1 \ni g : [a,b] \to \mathbb{R}$, αφού, όπως βρήκαμε:

$$\int_{\partial A} Pdx + \int_{\partial A} Qdy = -\iint_A \frac{\partial P}{\partial y} dxdy + \iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} dydx \Leftrightarrow$$

$$\int_{\partial A} Pdx + Qdy = \iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy$$

Είναι προφανές ότι εναλλάσοντας τους ρόλους των x και y, το Θεώρημα $Green$ θα ισχύει και για σύνολα $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < y < b, c < x < g(y)\}, C^1 \ni g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Η αποδειξη αυτή για των 2 αυτών ειδών σύνολα αρκεί για την απόδειξη του Θεωρήματος εξ ολοκλήρου. Για την γενική περίπτωση, τέμνουμε το A σε σύνολα της μορφής $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < g(x)\}, C^1 \ni g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ή της μορφής $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < y < b, c < x < g(y)\}, C^1 \ni g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Με εφαρμογή του $Green$ όπως το έχουμε αποδείξει μέχρι στιγμής σε έκαστο σύνολο, προκύπτει το ζητούμενο.

Εφαρμογή: Εμβαδόν της Έλλειψης:
Να υπολογιστεί το εμβαδόν της έλλειψης (ή ορθότερα ελλειπτικού χωρίου) με εξίσωση:

$$C_E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Αρχικά θα παραμετρικοποιήσουμε την μορφή της έλλειψης:

$$r(t) = \begin{cases} x(t) = acost \\ y(t) = bsint \end{cases} \quad , 0 \leq t \leq 2\pi$$

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της έλλειψης, ουσιαστικά χρειάζεται να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\iint_{\mathcal{X}[C_E]}, \text{ όπου } \mathcal{X}[C_E] \text{ το χωρίο που περικλείεται από την } C_E$$

Επειδή $\partial\mathcal{X}[C_E] = C_E$, από το Θεώρημα του $Green$ είναι δυνατόν να παρθεί ο ακόλουθος τύπος:

$$\iint_{\mathcal{X}[C_E]} = \int_{C_E} xdy$$

Οπότε αρκεί να υπολογιστεί το $\int_{C_E} xdy$:

$$\int_{C_E} xdy = \int_0^{2\pi} acost \cdot bcost\ dt = ab \int_0^{2\pi} cos^2 t\ dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} 1 + cos(2t)\ dt$$

$$= \frac{ab}{2} \left[t + \frac{sin(2t)}{2} \right]_0^{2\pi} = ab\pi$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου της έλλειψης είναι $ab\pi$.

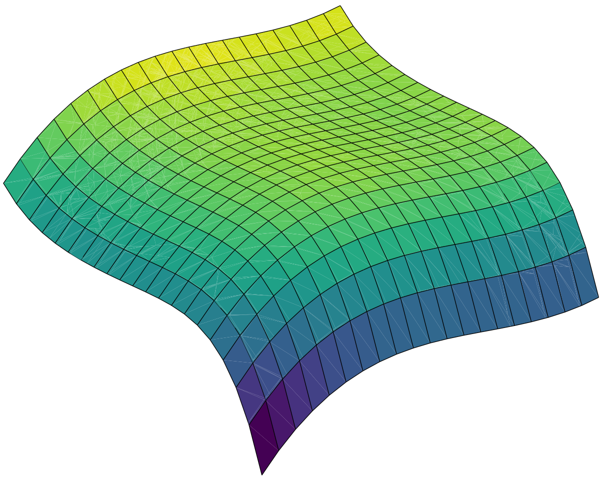
7.2 Θεώρημα του Stokes

Το Θεώρημα του *Stokes* ουσιαστικά αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος *Green*. Με μικρές αλλαγές στην διατύπωση και στις υποθέσεις, το θεώρημα του *Stokes* είναι μια μορφή του Θεωρήματος *Green* όχι πλέον σε επίπεδα στο $\mathbb{R}^2$, αλλά σε επιφάνειες στον χώρο $\mathbb{R}^3$.

Ορισμός: Ομαλή επιφάνεια:
Έστω $A \subset \mathbb{R}^3$ ένα συνεκτικό σύνολο, το οποίο είναι επιφάνεια. Θα λέμε ότι η επιφάνεια A είναι ομαλή εάν η παραμέτρισή της $v(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \left(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}\right)$$



Μία ομαλή επιφάνεια

Θεώρημα: Θεώρημα του *Stokes*:
Έστω $A \subset \mathbb{R}^3$ μία ομαλή επιφάνεια με ομαλό σύνορο ∂A. Τότε, για τις συναρτήσεις $P, Q, R \in C^1$ με $P = P(x,y,z), Q = Q(x,y,z), R = R(x,y,z) : A \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\int_{\partial A} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy \, + \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\, dydz \, + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\, dzdx$$

Όπως και στο Θεώρημα του *Green*, αρχικά ας υποθέσουμε ότι το A είναι της μορφής $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in B, z = g(x,y)\}$, όπου B είναι η προβολή του A στο επίπεδο x, y. Τότε έχουμε ότι:

$$\int_{\partial A} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\partial B} P(x,y,g(x,y)) + Q(x,y,g(x,y))dy + R(x,y,g(x,y))\left(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy\right) =$$

$$\int_{\partial B} \left(P(x,y,g(x,y)) + R(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}\right) dx + \left(Q(x,y,g(x,y)) + R(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial y}\right) dy$$

Με χρήση τώρα του Θεωρήματος *Green*:

$$= \iint_B \frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x,y,g(x,y)) + R(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P(x,y,g(x,y)) + R(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}\right)\, dxdy =$$

$$\iint_B \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\, dxdy =$$

$$\iint_B \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\, dxdy =$$

$$\iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy \, + \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\, dydz \, + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\, dzdx$$

Δηλαδή έχουμε:

$$\int_{\partial A} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\ dxdy\ + \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\ dydz\ + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\ dzdx$$

Οπότε ο τύπος του $Stokes$ ισχύει για σύνολα της μορφής $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in B, z = g(x,y)\}$. Είναι εμφανές ότι το επιχείρημα αυτό είναι συμμετρικό και επομένως μπορεί να εφαρμοστεί και για σύνολα της μορφής $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in B, x = g(y,z)\}$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,z) \in B, y = g(x,z)\}$, άρα ο τύπος του $Stokes$ θα ισχύει και σε αυτά τα σύνολα. Οι πληροφορίες αυτές αρκούν για να αποδειχθεί ο τύπος του $Stokes$ εξ ολοκλήρου. Στην γενική περίπτωση, χωρίζουμε την επιφάνεια σε σύνολα της προηγούμενης μορφής και με εφαρμογή του $Stokes$ όπως το έχουμε αποδείξει μέχρι στιγμής σε έκαστο σύνολο, προκύπτει το ζητούμενο.

Συμπληρώματα της Ύλης

8.1 Ακολουθίες στον $\mathbb{R}^m$

Πρόταση: Σύγκλιση ακολουθιών και υπακολουθιών:
Εάν η $\big(a(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία της οποίας όλες οι υπακολουθίες συγκλίνουν στο a, τότε και η ίδια συγκλίνει στο a. Ισχύει και το αντίστροφο.

Αφού όλες οι υπακολουθίες συγκλίνουν, διαλέγουμε τις δύο $a(2n-1), a(2n)$. Επειδή συγκλίνουν, για τυχόν $\varepsilon > 0$:

$$\text{Επειδή η } a(2n-1) \text{ συγκλίνει, } \exists\bar{\delta} > 0 : \forall 2n-1 > \delta, ||a(2n-1) - a|| < \varepsilon$$
$$\text{Επειδή η } a(2n-1) \text{ συγκλίνει, } \exists\hat{\delta} > 0 : \forall 2n > \delta, ||a(2n) - a|| < \varepsilon$$

Διαλέγοντας $\delta = max\{\bar{\delta}, \hat{\delta}\}$, παρατηρούμε ότι για $k > \delta$, $||a(k) - a|| < \varepsilon$, είτε k άρτιος, είτε περιττός. Επομένως η $a(n)$ συγκλίνει στο a.

Το αντίστροφο είναι άμεσο· εάν $a(n)$ συγκλίνει στο a, τότε κάθε υπακολουθία της θα συγκλίνει στο a, αφού εάν δεν συγκλίνει, για κάθε $\varepsilon > 0$ θα μπορεί να βρεθεί όρος της ακολουθίας εκτός της $S(a, \varepsilon)$. Αυτό είναι ακριβώς η άρνηση της σύγκλισης της $a(n)$, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

8.2 Στοιχεία Τοπολογίας

Πρόταση: Χαρακτηρισμός Ανοικτών συνόλων μέσω ακολουθιών:
Εάν ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό, τότε κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $\big(a(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ με $a(n) \to a \in A$ έχει τελικό τμήμα εντός του A. Ισχύει και το αντίστροφο.

Πράγματι, επειδή το A είναι ανοικτό και $a \in A$, θα μπορεί να βρεθεί $S(a, r)$ που να περιέχεται στο A. Επειδή η $\big(a(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο A, θα μπορεί να βρεθεί $\delta > 0$ τέτοιος ώστε:

$$\forall n > \delta, a(n) \in S(a, r) \subseteq A$$

Αυτό μας δίνει το ζητούμενο.

Για το αντίστροφο, ας υποθέσουμε ότι το A δεν είναι ανοικτό. Τότε, με άρνηση του ορισμού του ανοικτού συνόλου:

$$\forall r > 0, S(a, r) \cap A^c_{\mathbb{R}^n} \neq \emptyset$$

Θεωρούμε μία φθίνουσα προς το 0 ακολουθία ακτίνων $\big(r(i)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ και επίσης μία ακολουθία που παίρνει κάθε τιμή της $a_n \in S(a, r(i)) \cap A^c_{\mathbb{R}^n}$. Η ακολουθία αυτή τείνει στο a αλλά κανένα τελικό τμήμα της δεν είναι υποσύνολο του A. Αυτό μας οδηγεί σε άτοπο, και συνεπώς το A είναι ανοικτό.

Πρόταση: Ανοικτές και Κλειστές σφαίρες ως σύνολα:
1. Κάθε ανοικτή σφαίρα $S(x, r)$ είναι ανοικτό σύνολο.
2. Κάθε κλειστή σφαίρα $B(x, r)$ είναι κλειστό σύνολο.

1. Έστω μία ακολουθία $\big(a(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει στο $a \in S(x, r)$. Επειδή η ακολουθία αυτή συγκλίνει, μπορεί από τον ορισμό της σύγκλισης, να βρεθεί για κάθε $\varepsilon > 0$ ένας δ τέτοιος ώστε η ανοικτή σφαίρα $S(a, \varepsilon)$ να περιέχει όλους τους επόμενους του $a(\delta)$ όρους της ακολουθίας. Θεωρούμε ως ε τον αριθμό $\varepsilon = r - ||x - a||$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $b \in S(a, \varepsilon)$ ισχύει:

$$||b - a|| < ||x - a|| + \varepsilon \leq r - ||x - a|| + ||x - a|| = r$$

όπου η τελευταία ανισότητα είναι τριγωνική. Αυτό μας δείχνει ότι $b \in S(x, r)$ και συνεπώς $S(a, \varepsilon) \subseteq S(x, r)$. Οπότε η $S(x, r)$ είναι ανοικτό σύνολο, λόγω του προηγούμενου πορίσματος.

2. Έστω μία ακολουθία $\big(a(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \sqsubseteq B(x,r)$ η οποία συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}^n$. Επειδή η ακολουθία αυτή είναι εντός του $B(x,r)$, θα έχουμε ότι:

$$||a(n)-x|| \leq r \Rightarrow \lim_{n\to\infty} ||a(n)-x|| \leq r \Rightarrow ||a-x|| \leq r$$

Από το τελευταίο προκύπτει ότι $a \in B(x,r)$ και κατ' επέκταση, λόγω του πορίσματος 'Χαρακτηρισμός Κλειστών συνόλων μέσω ακολουθιών', η $B(x,r)$ είναι κλειστό σύνολο.

Ορισμός: Κλειστάνοικτα σύνολα:
Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ θα ονομάζεται κλειστάνοικτο εάν είναι ανοικτό και κλειστό ταυτόχρονα

Πρόταση: Ύπαρξη Κλειστάνοικτων συνόλων:
Υπάρχουν τουλάχιστον 2 κλειστάνοικτα σύνολα στον $\mathbb{R}^n$.

Πράγματι, το $\emptyset$ είναι κλειστάνοικτο σύνολο. Είναι ανοικτό αφού αν δεν ήταν, θα μπορούσε να βρεθεί κάποιο $x \in \emptyset$ για το οποίο κάθε σφαίρα $S(x,r)$ δεν θα περιέχεται στο $\emptyset$. Αυτό είναι άτοπο διότι το κενό δεν έχει στοιχεία. Επίσης είναι κλειστό, αφού αν δεν ήταν, θα υπήρχε ακολουθία του $\emptyset$ που δεν θα συνέκλινε στο $\emptyset$. Αυτό είναι και πάλι άτοπο αφού το $\emptyset$ δεν έχει στοιχεία.

Επίσης, το $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστάνοικτο. Είναι ανοικτό επειδή το συμπλήρωμά του είναι το $\emptyset$, το οποίο είναι κλειστό σύνολο, και είναι κλειστό επειδή το συμπλήρωμά του είναι το $\emptyset$, το οποίο είναι ανοικτό σύνολο.

8.3 Παραγωγισιμότητα και Διαφορισιμότητα

Θεώρημα: Γενικευμένος κανόνας της αλυσίδας:
Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^m, B \subseteq \mathbb{R}^n$ και οι συναρτήσεις $f : B \to \mathbb{R}^p, g : A \to B$. Για τον πίνακα Jacobi της σύνθεσης $f \circ g$ ισχύει:

$$\mathcal{J}(f\circ g) = \mathcal{J}f\big|_g \cdot \mathcal{J}g$$

Πράγματι, θεωρούμε $f = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$ καθώς επίσης και τις συναρτήσεις $g^{x_i} = (g_1, g_2, \cdots, g_n)(x_i)$, οι οποίες είναι ουσιαστικά η g, αλλά με ως μόνη μεταβλητή την x_i. Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας όπως έχει αποδειχθεί έως τώρα, για κάθε συνάρτηση $f_k \circ g^{x_i}$ ισχύει:

$$\frac{\partial(f_k\circ g^{x_i})}{\partial x_i} = \sum_{j\in[n]} \frac{\partial f_k}{\partial y_j}\Big|_{g^{x_i}} \cdot \frac{dg_k^{x_i}}{dx_i}$$

Ισοδύναμα, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{\partial(f_k\circ g^{x_i})}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_k}{\partial y_1}\Big|_{g^{x_i}}, \frac{\partial f_k}{\partial y_2}\Big|_{g^{x_i}}, \cdots, \frac{\partial f_k}{\partial y_n}\Big|_{g^{x_i}}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{dg_1^{x_i}}{dx_i} \\ \frac{dg_2^{x_i}}{dx_i} \\ \vdots \\ \frac{dg_n^{x_i}}{dx_i} \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση στην τελευταία της μορφή για τα διάφορα k και i, μπορούμε να δούμε ότι:

$$\mathcal{J}(f\circ g) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\Big|_g & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\Big|_g \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\Big|_g & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}\Big|_g \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1}\Big|_g & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_n}\Big|_g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} = \mathcal{J}f\big|_g \cdot \mathcal{J}g$$

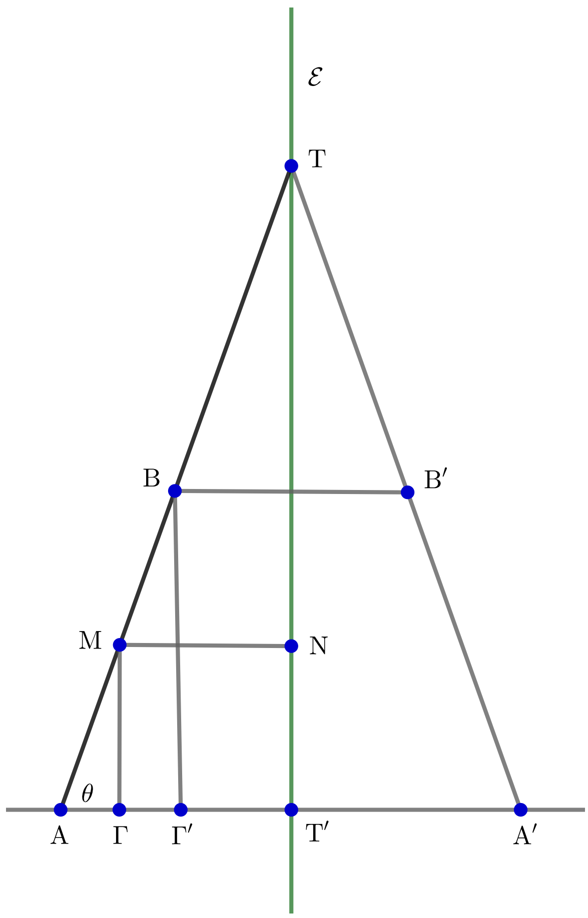
το οποίο είναι το ζητούμενο.

8.4 Επικαμπύλια και Επιφανειακά ολοκληρώματα

Θεώρημα: Θεώρημα του Πάππου, Παράπλευρη επιφάνεια περιστροφής ευθυγράμμων τμημάτων:
Έστω $\mathcal{E}$ ευθεία στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο και AB ένα ευθύγραμμο τμήμα μη κάθετο στην ευθεία αυτή, στον ίδιο χώρο. Περιστρέφουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB γύρω από την ευθεία $\mathcal{E}$ και δημιουργούμε στερεό εκ περιστροφής $\mathcal{S}$. Το παράπλευρο εμβαδόν του στερεού αυτού είναι ακριβώς:

$$\varpi_{\mathcal{S}} = 2\pi \cdot AB \cdot d(M, \mathcal{E})$$

όπου M είναι το μέσον του AB.



Το παράπλευρο εμβαδόν που ζητούμε παρατηρούμε ότι είναι η διαφορά των παράπλευρων εμβαδών $(\varpi_{C_1}, \varpi_{C_2})$ των κώνων $C_1 = T, \widehat{AA'}$ και C_2 και $C_2 = T, \widehat{BB'}$. Γι' αυτό υπολογίζουμε λοιπόν πρώτα το παράπλευρο εμβαδόν τού C_1 :

Το ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma'$ έχει μήκος $A\Gamma' = AM \cdot cos\theta$

Επομένως, από το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ATT'}$, η πλευρά AT θα έχει μήκος $\dfrac{AT}{AT'} = \dfrac{1}{cos\theta} \Rightarrow AT = \dfrac{AT'}{cos\theta}$

Το μήκος του AT' είναι $MN + A\Gamma$ και η πλευρά $A\Gamma$ είναι με την σειρά της $\dfrac{AB}{2}cos\theta$, από το τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Gamma M}$.

Με αντικατάσταση λοιπόν στην σχέση $AT = \dfrac{AT'}{cos\theta}$, βρίσκουμε ότι το μήκος του AT γίνεται ισοδύναμα $\dfrac{MN}{cos\theta} + \dfrac{AB}{2}$.

Τελικά το παράπλευρο εμβαδόν του κώνου C_1 είναι $\pi \cdot AT \cdot AT' = \pi \cdot \left(\dfrac{MN}{cos\theta} + \dfrac{AB}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{AB}{2}cos\theta + MN\right)$, αφού ο κώνος C_1 μπορεί να 'ξεδιπλωθεί' σε κυκλικό τομέα τόξου $2\pi \cdot AT'$ και ακτίνας AT, ο οποίος έχει εμβαδόν $\pi \cdot AT^2 \cdot \dfrac{2\pi \cdot AT'}{2\pi \cdot AT}$.

Στην συνέχεια υπολογίζουμε το παράπλευρο εμβαδόν τού C_2 :

Το τμήμα BT θα υπολογιστεί πρώτο, καθώς η δουλειά για τον υπολογισμό του έχει ουσιαστικά γίνει στον υπολογισμό του παράπλευρου εμβαδού του C_1. Επειδή λοιπόν $BT = AT - AB$, έχουμε ότι $BT = \dfrac{MN}{cos\theta} - \dfrac{AB}{2}$.

Το τμήμα $\dfrac{BB'}{2}$ είναι ακριβώς $MN - A\Gamma$, αφού τα τμήματα $A\Gamma, \Gamma\Gamma'$ είναι μεταξύ τους ίσα. Η τελευταία ισότητα είναι άμεση συνέπεια του ότι η $M\Gamma$ είναι παράλληλη της $B\Gamma'$ και διέρχεται από το μέσον M του AB. Επομένως $\dfrac{BB'}{2} = MN - \dfrac{AB}{2}cos\theta$.

Τελικά το παράπλευρο εμβαδόν του κώνου C_2 είναι $\pi \cdot BT \cdot \dfrac{BB'}{2} = \pi \cdot \left(\dfrac{MN}{cos\theta} - \dfrac{AB}{2}\right) \cdot \left(MN - \dfrac{AB}{2}cos\theta\right)$, αφού ο κώνος C_2 μπορεί να 'ξεδιπλωθεί' σε κυκλικό τομέα τόξου $2\pi \cdot \dfrac{BB'}{2}$ και ακτίνας BT, ο οποίος έχει εμβαδόν $\pi \cdot BT^2 \cdot \dfrac{2\pi \cdot \frac{BB'}{2}}{2\pi \cdot BT}$.

Με αυτά προκύπτει ουσιαστικά το ζητούμενο, αφού όπως αναφέρθηκε στην αρχή της απόδειξης:

$$\varpi_{\mathcal{S}} = \varpi_{C_1} - \varpi_{C_2} = \pi \cdot \left(\frac{MN}{cos\theta} + \frac{AB}{2}\right) \cdot \left(\frac{AB}{2}cos\theta + MN\right) - \pi \cdot \left(\frac{MN}{cos\theta} - \frac{AB}{2}\right) \cdot \left(MN - \frac{AB}{2}cos\theta\right) \Rightarrow$$

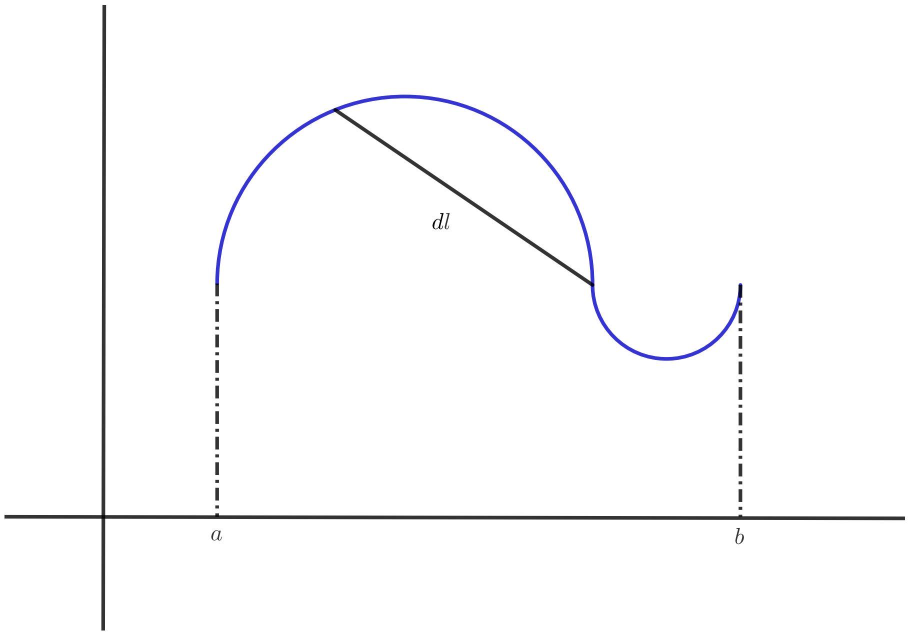
$$\varpi_{\mathcal{S}} = \pi\left(MN\cdot AB + \frac{MN^2}{cos\theta} + \frac{AB^2}{4}cos\theta - \frac{MN^2}{cos\theta} + MN\cdot AB - \frac{AB^2}{4}cos\theta\right) = 2\pi\cdot MN\cdot AB \Rightarrow$$

$$\varpi_{\mathcal{S}} = 2\pi\cdot AB\cdot d(M,\mathcal{E})$$

Πόρισμα: Παράπλευρο εμβαδόν συναρτήσεων εκ περιστροφής:
Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ να είναι μία πραγματική και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Περιστρέφουμε την συνάρτηση αυτή γύρω από τον άξονα των x προς σχηματισμό επιφανείας F. Το παράπλευρο εμβαδόν της επιφανείας F είναι ακριβώς:

$$\varpi_F = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}\,dx$$

Ας επιλέξουμε ένα στοιχειώδες ευθύγραμμο τμήμα dl το οποίο τμηματικά προσεγγίζει την f στο x. Σύμφωνα με το Θεώρημα: 'Θεώρημα του Πάππου, Παράπλευρη επιφάνεια περιστροφής ευθυγράμμων τμημάτων' η περιστροφή της f στο x τμηματικά δημιουργεί παράπλευρο εμβαδόν που προσεγγίζεται από το παράπλευρο εμβαδόν που δημιουργεί το dl, το οποίο είναι ακριβώς $2\pi\cdot f(x)\cdot dl$.

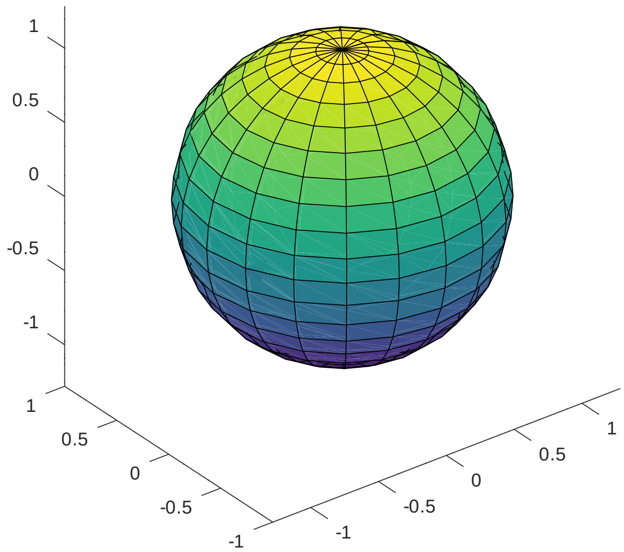


Θεωρώντας λοιπόν τώρα μία συνάρτηση πυκνότητας $p(x) = 2\pi\cdot f(x)$, παρατηρούμε ότι το παράπλευρο εμβαδόν που επιθυμούμε να υπολογίσουμε δεν είναι άλλο από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην καμπύλη f με βάρος $p(x)$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την μορφή του επικαμπυλίου ολοκληρώματος στην μορφή του Πορίσματος: 'Επιφανειακό Ολοκλήρωμα Επιφάνειας - Συνάρτησης', προκύπτει άμεσα το ζητούμενο, ότι δηλαδή:

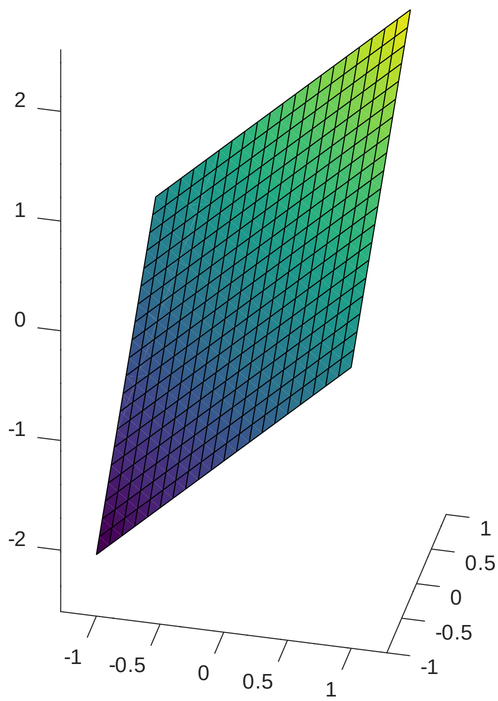
$$\varpi_F = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}\,dx$$

Αρχείο Γραφημάτων

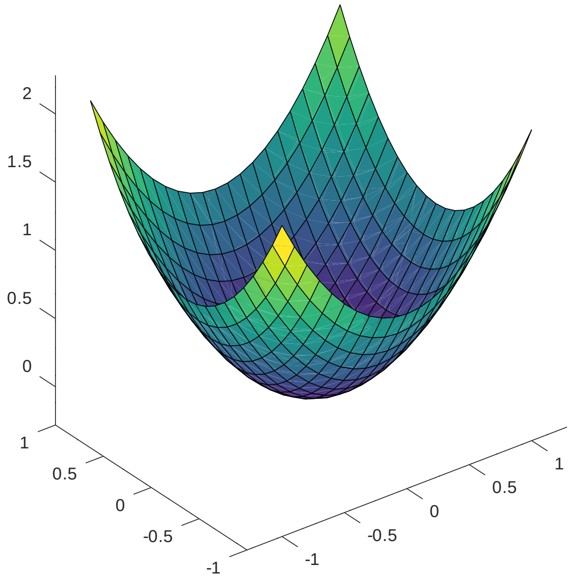
9.1 Γραφήματα με Ονοματεπώνυμο



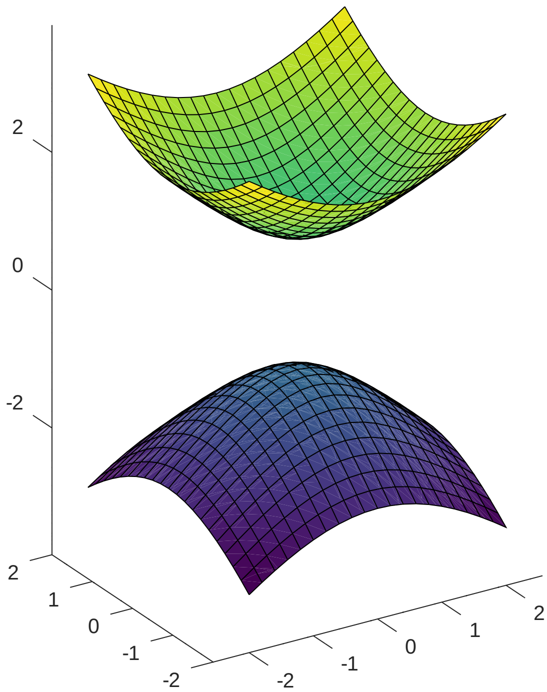
Σχήμα 9.1: Σφαίρα: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Στο σχήμα εικονίζεται η $x^2 + y^2 + z^2 = 1$



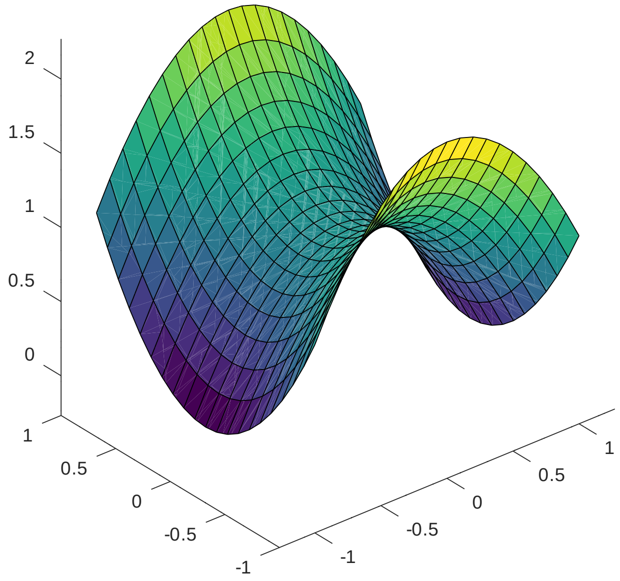
Σχήμα 9.2: Επίπεδο: $ax + by + cz = d$. Στο σχήμα εικονίζεται το $x + y - z = 0$



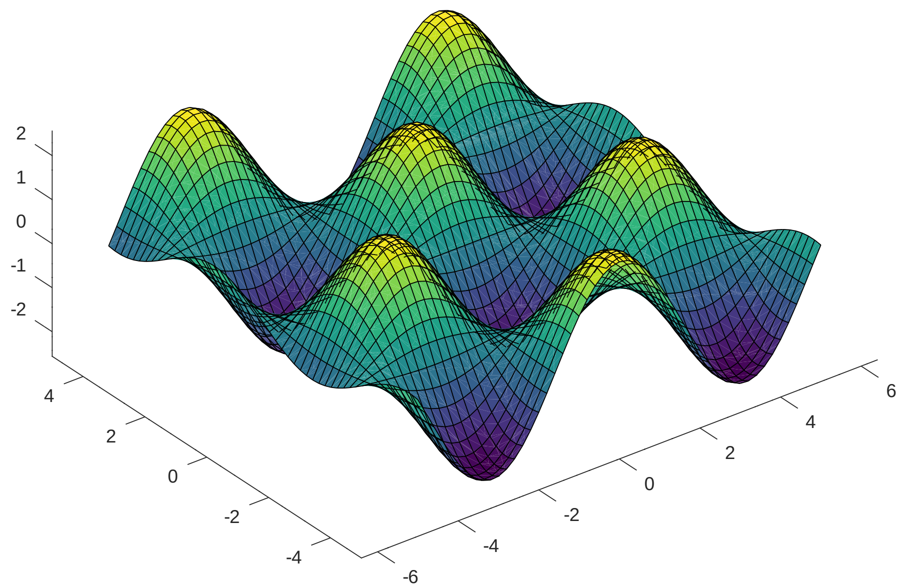
Σχήμα 9.3: Παραβολοειδές: $z = ax^2 + by^2 + c$. Στο σχήμα εικονίζεται το $z = x^2 + y^2$



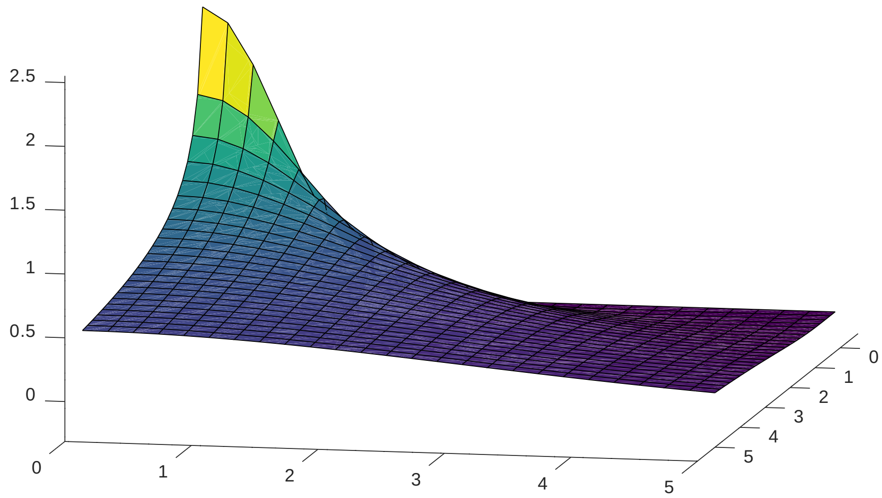
Σχήμα 9.4: Υπερβολοειδές: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = d$. Στο σχήμα εικονίζεται το $x^2 + y^2 - z^2 = 1$



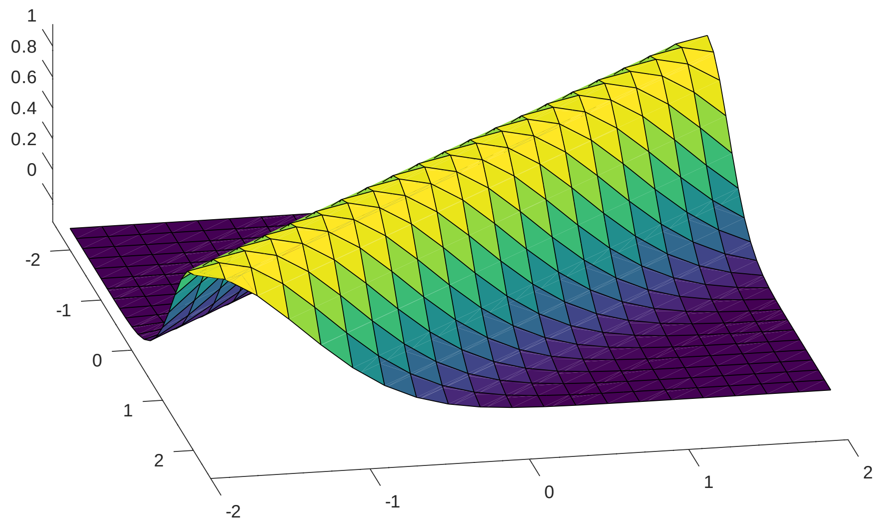
Σχήμα 9.5: Υπερβολικό Παραβολοειδές: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z}{c} = d$. Στο σχήμα εικονίζεται το $x^2 - y^2 + z = 1$



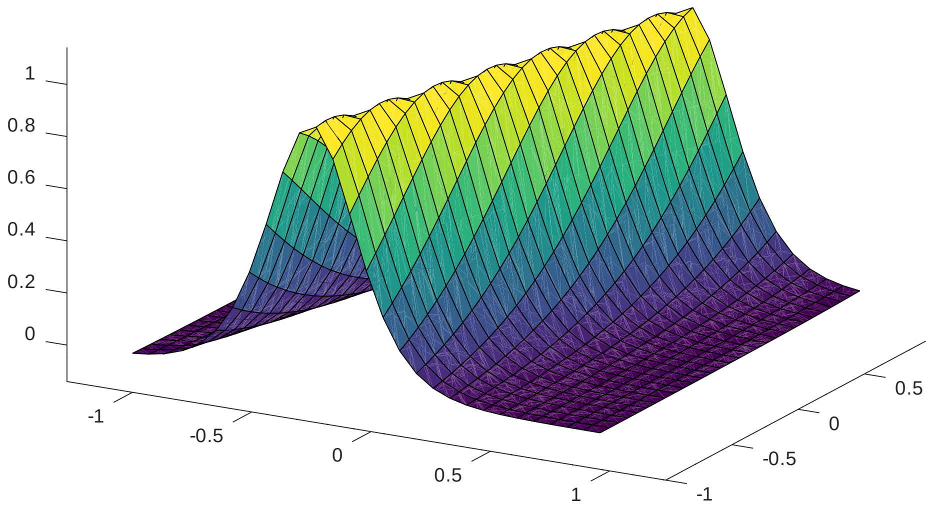
Σχήμα 9.6: Κυματική εξίσωση: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$. Χρησιμοποιείται για να περιγράψει την κίνηση της ακτινοβολίας ή του ήχου. Στο σχήμα εικονίζεται η $sin(x+t) + sin(x-t)$, που είναι μία λύση της διαφορικής εξίσωσης αυτής.



Σχήμα 9.7: Εξίσωση διάχυσης θερμότητας: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t}$. Χρησιμοποιείται για να περιγράψει την διάχυση της θεμότητας. Στο σχήμα εικονίζεται η $\sqrt{\frac{1}{t}} exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right)$, που είναι μία λύση της διαφορικής εξίσωσης αυτής.

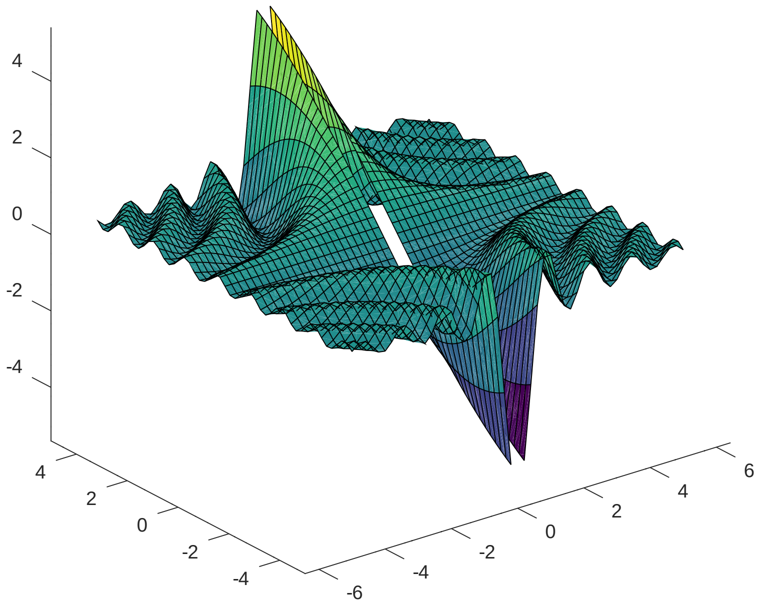


Σχήμα 9.8: Εξίσωση μεταφοράς: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$. Χρησιμοποιείται για να μοντελοποιήσει την μεταφορά πληροφορίας μέσω καλωδίων. Στο σχήμα εικονίζεται η $e^{-(x+t)^2}$, που είναι μία λύση της διαφορικής εξίσωσης αυτής.

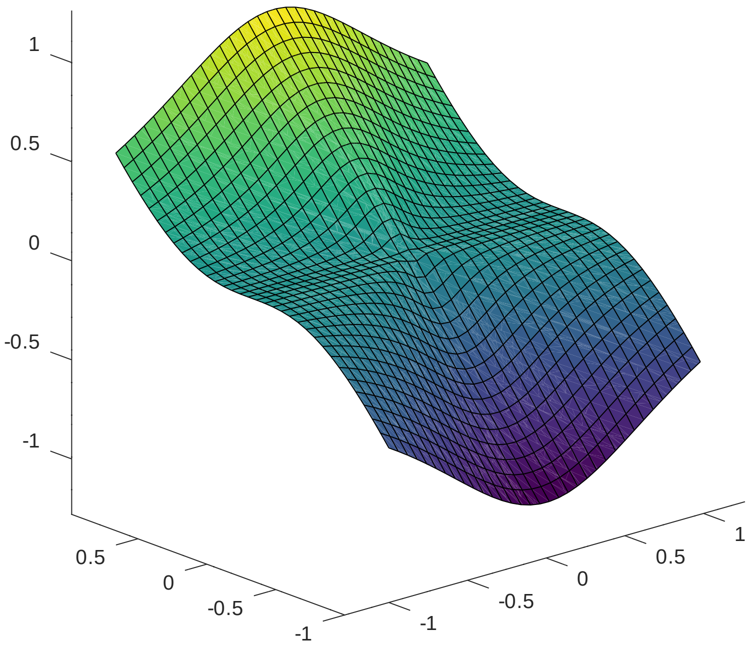


Σχήμα 9.9: Εξίσωση KdV: $\dfrac{\partial f}{\partial t} + 6f\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}$. Χρησιμοποιείται για να περιγράψει την κίνηση του νερού σε στενά κανάλια / αγωγούς. Στο σχήμα εικονίζεται η $cosh^{-2}(x-4t)$, που είναι μία λύση της διαφορικής εξίσωσης αυτής. $\left[\text{Υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση του υπερβολικού συνημιτόνου είναι } cosh = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right]$

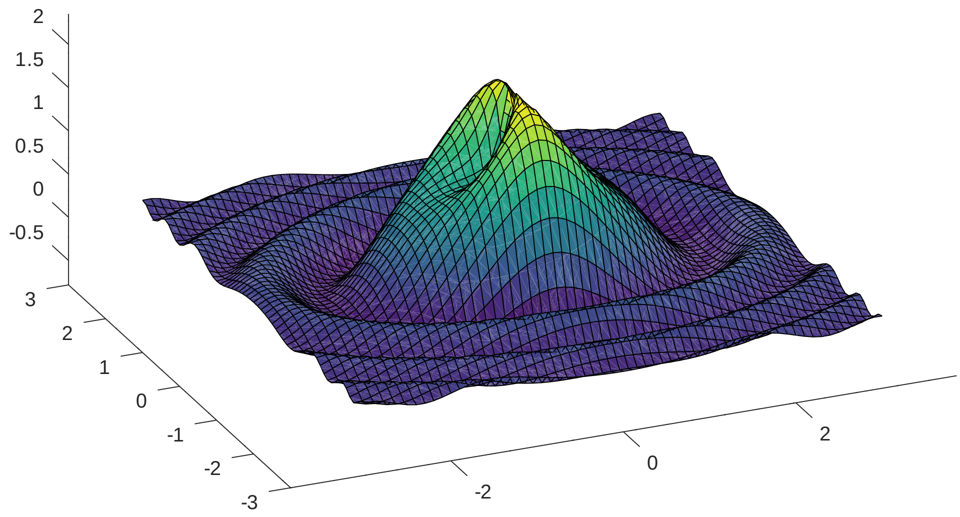
9.2 Λοιπά γραφήματα



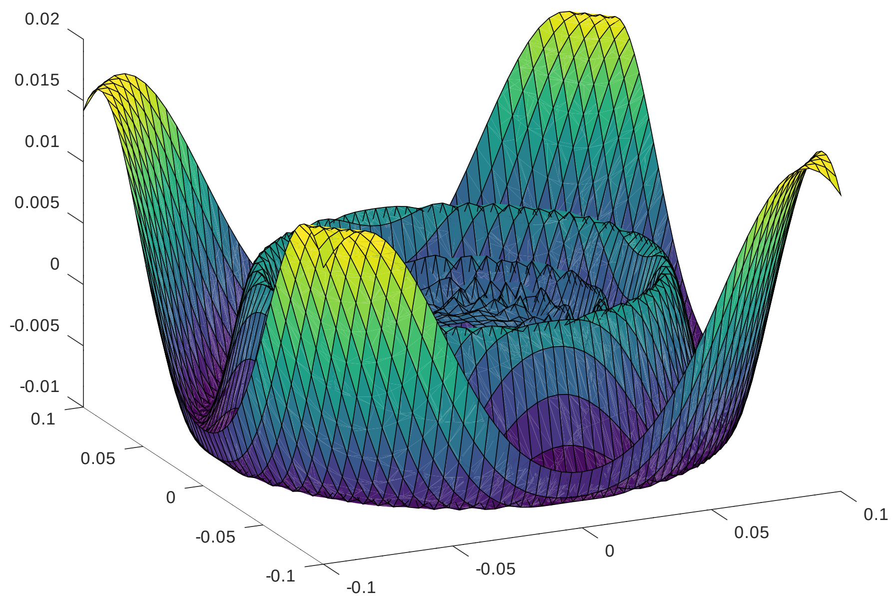
Σχήμα 9.10: $\frac{sin(xy)}{x}$



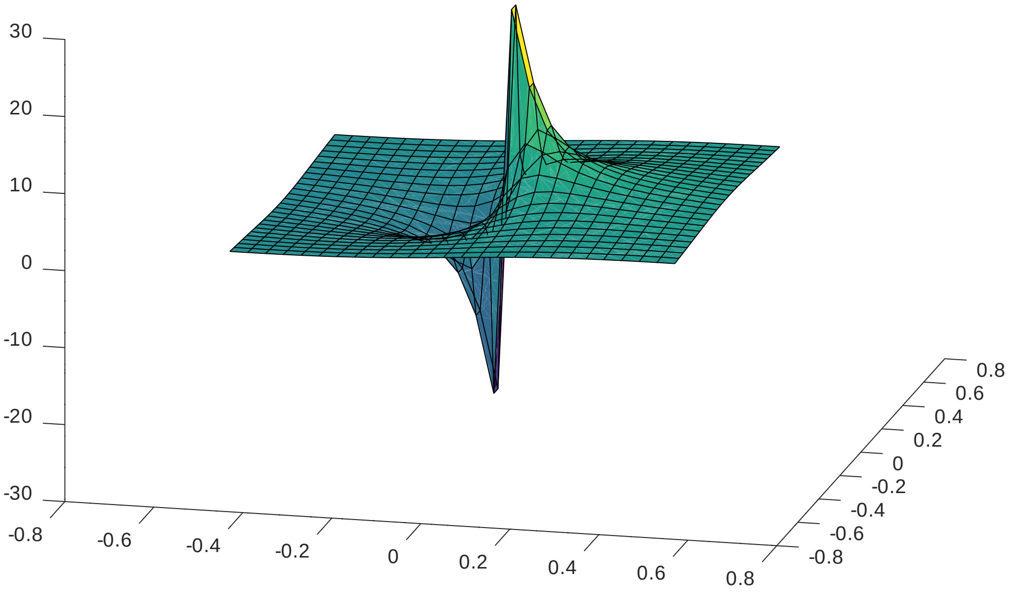
Σχήμα 9.11: $\frac{y^3}{x^2+y^2}$



Σχήμα 9.12: $\dfrac{sin(x^2+2y^2)}{x^2+y^2}$



Σχήμα 9.13: $(x^2+y^2)sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$



Σχήμα 9.14: $\dfrac{x}{x^2+y^2}$