Γεωμετρική Ανάλυση - Συλλογή (μερικών) Αποδείξεων

Αναστάσιος Φράγκος Τελ. ενημέρωση: Πέμπτη, 15 Δεκεμβρίου 2022

Συμβολισμοί - Παρατηρήσεις

1. $[n] := \{1, 2, \cdots, n\}$. **2.** $\mathfrak{S}(A)$: είναι το σύνολο των μεταθέσεων $\tau : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A$. **3.** $A_{i,j}$: Είναι ο πίνακας A αν του αφαιρεθεί η i γραμμή και η j στήλη. **4.** $A(j_1, \cdots j_m)$: Είναι ο πίνακας που προκύπτει από «συνένωση» των στηλών $j_1, \cdots, j_m$ του πίνακα A. **5.** $\widehat{v} := v/|v|$. **5.** $\mathscr{O}(A)$ είναι το σύνολο των σχετικά ανοικτών συνόλων του A. **6.** χ_A είναι η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου A. **7.** $A \Subset B :\Leftrightarrow \overline{A} \subseteq B^\circ$. **8.** $f \ll g :\Leftrightarrow f \in O(g) \Leftrightarrow f = O(g)$.

Ευχαριστώ τον κ. Γιαλελή Νικόλαο για την επίβλεψη της εργασίας.

Περιεχόμενα

1 Βασικά γεωμετρικά αποτελέσματα **1**

2 Στοιχεία διαφορικού λογισμού **4**

2.1 Βασικές έννοιες 4

2.2 Διαφορίσιμες διαμερίσεις της μονάδος 6

2.3 Θεωρήματα ομαλής επέκτασης 9

1 Βασικά γεωμετρικά αποτελέσματα

Υπενθύμιση 1.1. Για τις διάφορες διαστάσεις $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε ως ορίζουσα των $n \times n$ πινάκων τις συνάρτησεις $\det_n : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$, που ορίζονται «αναδρομικά» ως εξής:

$$\det_1(a) = a \ \textbf{και} \ \det_n A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1,k} \det_{n-1} A_{1,k} \text{ όπου } A = (a_{i,j})_{i,j \in [n]}$$

Ο πίνακας $A_{1,k}$ είναι ουσιαστικά ο A, αφού του αφαιρεθεί η 1η γραμμή και η $k-$οστή στήλη. Εφόσον δεν υπάρχει πιθανότητα σύγχυσης, θα συμβολίζουμε $\det_n = \det$ (παραλείποντας τους δείκτες).

Θεώρημα 1.1. (Τύπος της ορίζουσας με μεταθέσεις). Για την ορίζουσα $\det : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$ αληθεύει η σχέση:

$$\det A = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}([n])} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\tau(i)}$$

όπου $\operatorname{sgn}(\tau)$ είναι το σημείο της μετάθεσης τ.

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε επαγωγικά αυτήν την σχέση. Για $n = 1$, ισχύει τετριμμένα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι αληθεύει για $n-1$, και θα αποδείξουμε τον τύπο για n.

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα βάσει του ορισμού έχουμε:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1,k} \det A_{1,k}$$

και παρατηρούμε ότι στο εν λόγω ανάπτυγμα ο πίνακας $A_{1,k}$ είναι διάστασης $(n-1) \times (n-1)$. Για το ανάπτυγμα της $(n-1) \times (n-1)$ υποορίζουσας $\det A_{1,k}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απ' ευθείας την επαγωγική υπόθεση, θα είναι όμως ευκολότερο να κάνουμε μια προετοιμασία πριν απ' αυτό.

Ας ορίσουμε τους πίνακες $\tilde{A}_{1,k}$, που ουσιαστικά είναι οι αντίστοιχοι πίνακες $A_{1,k}$ με την $k-$οστή στήλη μεταφερμένοι στην θέση της πρώτης στήλης του $A_{1,k}$. Η μεταφορά αυτή γίνεται με κυκλικό τρόπο, δηλαδή η $k-$οστή στήλη μεταφέρεται στην 1η, η 1η στη 2η και ούτω καθεξής. Ο προκύπτον πίνακας έχει ορίζουσα:

$$\det \tilde{A}_{1,k} = (-1)^{k-1} \det A_{1,k}$$

αφού η κυκλική μετάθεση των στηλών μπορεί να ειδωθεί ως σύνθεση $k-1$ αντιμεταθέσεων στηλών. Μ' αυτό υπόψη μπορούμε να γράψουμε:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} \det \tilde{A}_{1,k}$$

και χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, γράφοντας $\tilde{A}_{1,k} = (\tilde{a}_{i,j})$:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}([n-1])} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n-1} \tilde{a}_{i,\sigma(i)}$$

Εάν επιπλέον επεκτείνουμε τον συμβολισμό ώστε το $a_{1,k}$ να ταυτίζεται με το ≪αντίστοιχο≫ $\tilde{a}_{n,n}$ του επεκταμένου $\tilde{A}_{1,k}$, τότε:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\tau \in \mathfrak{S}([n]) \\ \tau(n)=n}} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^{n-1} \tilde{a}_{i,\tau(i)}$$

Το διπλό άθροισμα $\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\tau \in \mathfrak{S}([n]) \\ \tau(n)=n}} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\tau \in ([n] \rightarrowtail [n] \setminus \{k\}) \\ \tau(n)=k}}$ ταυτίζεται με το $\sum_{\tau \in \mathfrak{S}([n])}$, οπότε έχουμε το ζητούμενο:

$$\det A = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}([n])} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\tau(i)}$$

(Φυσικά αξίζει να παρατηρηθεί ότι $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau)$).

□

Ορισμός 1.1. (Πλειογραμμικές συναρτήσεις). Έστω V ένας $\mathbb{R}-$διανυσματικός χώρος διάστασης m και $f : V^m \to U$ μια απεικόνιση προς έναν διανυσματικό χώρο U. Η f θα καλείται $m-$γραμμική αν είναι ≪γραμμική στις συντεταγμένες≫, δηλαδή:

$$f(v_1, \cdots, v_k + t\tilde{v}_k, \cdots, v_m) = f(v_1, \cdots, v_k, \cdots, v_m) + t \cdot f(v_1, \cdots, \tilde{v}_k, \cdots, v_m)$$

για κάθε $v_1, \cdots, v_m, \tilde{v}_k \in V$ και $t \in \mathbb{R}$.

Λήμμα 1.1. (Ανάλυση πλειογραμμικών συναρτήσεων). Έστω $f : V \to \mathbb{R}$ μια $m-$γραμμική συνάρτηση από τον $m-$διάστατο διανυσματικό χώρο V. Εάν $v_i = \sum_{j_i=1}^{m} v_{i,j_i} b_{j_i} \in V$ για $i \in [m]$, (όπου $v_{i,j_i}, b_{j_i} \in V$) τότε:

$$f(v_1, \cdots, v_m) = \sum_{j_1, \cdots, j_m = 1}^{m} f(b_{j_1}, \cdots, b_{j_m}) \prod_{\ell \in [m]} v_{\ell, j_\ell}$$

■

Απόδειξη: Πράγματι, λόγω της $m-$γραμμικότητας της f:

$$\begin{aligned}
f(v_1, \cdots v_m) &= f\left(\sum_{j_1=1}^{m} v_{1,j_1} b_{j_1}, \cdots, \sum_{j_m=1}^{m} v_{m,j_m} b_{j_m}\right) \\
&= \sum_{j_1} v_{1,j_1} \cdot f\left(b_{j_m}, \sum_{j_2=1}^{m} v_{2,j_2} b_{j_2}, \cdots, \sum_{j_m=1}^{m} v_{m,j_m} b_{j_m}\right) \\
&= \cdots = \\
&= \sum_{j_1} \cdots \sum_{j_m} f(b_{j_1}, \cdots, b_{j_m}) \prod_{\ell \in [m]} v_{\ell, j_\ell} \\
&= \sum_{j_1, \cdots, j_m = 1}^{m} f(b_{j_1}, \cdots, b_{j_m}) \prod_{\ell \in [m]} v_{\ell, j_\ell}
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 1.2. (Τύπος Cauchy-Binet). Έστω $m \leqslant n$ φυσικοί αριθμοί και δύο πίνακες $X = \left(x_{i,j}\right)_{i=1,j=1}^{n,m} \in \mathbb{R}^{n,m}$, $Y = \left(x_{i,j}\right)_{i=1,j=1}^{m,n} \in \mathbb{R}^{m,n}$. Αληθεύει:

$$\det(YX) = \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_m \\ i_k \in [n]}} \det\left(x_{i_k,j}\right)_{k,j=1}^{m} \cdot \det\left(y_{i,i_k}\right)_{i,k=1}^{m}$$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε τον εν λόγω τύπο κάνοντας χρήση του **Θεωρήματος 1.1** καθώς επίσης και του **Λήμματος 1.1**.

Κατ' αρχάς γράφουμε:

$$\begin{aligned}\det(YX) &= \det\begin{pmatrix} \sum_{j_1=1}^{n} y_{1,j_1}x_{j_1,1} & \cdots & \sum_{j_m=1}^{n} y_{1,j_m}b_{j_m,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j_1=1}^{n} y_{m,j_1}x_{j_1,m} & \cdots & \sum_{j_m=1}^{n} y_{m,j_m}b_{j_m,m} \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} (y_1,j_1)_{j_1}(x_{j_1,1})_{j_1} & \cdots & (y_1,j_m)_{j_m}(x_{j_m,1})_{j_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_m,j_1)_{j_1}(x_{j_1,m})_{j_1} & \cdots & (y_m,j_m)_{j_m}(x_{j_m,m})_{j_m} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

και βάσει του **Λήμματος 1.1**:

$$\det(YX) = \sum_{j_1,\cdots,j_m=1}^{n} \det Y(j_1,\cdots,j_m) \prod_{\ell\in[m]} x_{j_\ell,\ell}$$

Τώρα καθεμία από τις ορίζουσες $\det Y(j_1,\cdots,j_m)$ μηδενίζεται εάν έστω κι ένα ζεύγος δεικτών είναι ίδιο, επομένως τα διάφορα $j_1,\cdots,j_m$ μπορούν να θεωρηθούν διακεκριμμένα.

Για μία τυχούσα μετάθεση των (πλέον διακεκριμμένων) δεικτών έχουμε:

$$\det Y(j_1,\cdots j_m) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det Y(j_{\sigma(1)},\cdots,j_{\sigma(m)})$$

οπότε αν σ είναι μετάθεση τέτοια ώστε τα $j_{\sigma(k)} = i_k$ να αποκτούν αύξουσα σειρά, τότε:

$$\det(YX) = \sum_{i_1<\cdots<i_m} \det Y(i_1,\cdots,i_m) \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{\ell\in[m]} x_{j_\ell,j_{\sigma(\ell)}}$$

Από το **Θεώρημα 1.1** έπεται:

$$\det(YX) = \sum_{i_1<\cdots<i_m} \det Y(i_1,\cdots,i_m)\cdot\det X^T(i_1,\cdots i_m)$$

δηλαδή το ζητούμενο:

$$\det(YX) = \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_m \\ i_k \in [n]}} \det\left(x_{i_k,j}\right)_{k,j=1}^{m} \cdot \det\left(y_{i,i_k}\right)_{i,k=1}^{m}$$

□

Ορισμός 1.2. (Εξωτερικό γινόμενο στους $\mathbb{R}^n$). Ας θεωρήσουμε την οικογένεια $\{v_i\}_{i=1}^{n-1}$ γραμμικώς ανεξάρτητων στοιχείων του $\mathbb{R}^n$ και $V = \operatorname{span}\{v_i\}_{i=1}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$. Το διάνυσμα:

$$\bigwedge_{i=1}^{n-1} v_i := \det\begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_n \\ v_{1,1} & \cdots & v_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1,1} & \cdots & v_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

είναι κάθετο στον V, έχει μέτρο $\sqrt{\det(M^T M)}$ (όπου $M = (v_{i,j})_{i=1,j=1}^{n-1,n}$) και το σύνολο $\left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} v_i, v_1, \cdots, v_{n-1} \right)$ είναι θετικά προσανατολισμένη (διατεταγμένη) βάση του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη: Για να δείξουμε ότι το $\bigwedge_{i=1}^{n-1} v_i$ είναι κάθετο στο V, θα δείξουμε ότι:

$$\left\langle \bigwedge_{i=1}^{n-1} v_i, v_j \right\rangle = 0, \ \forall j \in [n-1]$$

Πράγματι, επειδή $\bigwedge_{i=1}^{n-1} v_i = \left((-1)^{1+k} \det M_{-,k} \right)_{k=1}^{n}$, θα έχουμε:

$$\left\langle \bigwedge_{i=1}^{n-1} v_i, v_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} v_{j,k} \det M_{-,k} = \det \begin{pmatrix} v_{j,1} \cdots v_{j,n} \\ M \end{pmatrix} \overset{\star}{=} 0$$

Η ισότητα άστρο ($\star$) δικαιολογείται από το ότι ο πίνακας $\begin{pmatrix} v_{j,1} \cdots v_{j,n} \\ M \end{pmatrix}$ έχει δύο ίσες γραμμές.

Όσον αφορά το μέτρο του διανύσματος, γράφουμε:

$$\left| \bigwedge_{i=1}^{n-1} v_i \right|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left[\det(M_{-,k}) \right]^2 = \sum_{k=1}^{n} \det(M_{-,k}) \cdot \det(M_{-,k}^T)$$

κι από το **Θεώρημα 1.2** έπεται:

$$\left| \bigwedge_{i=1}^{n-1} v_i \right|^2 = \det(M^T M) \Rightarrow \left| \bigwedge_{i=1}^{n-1} v_i \right| = \sqrt{\det(M^T M)}$$

Τέλος, αποδεικνύοντας ότι η ορίζουσα:

$$\det \begin{pmatrix} \bigwedge_{i=1}^{n-1} v_i \\ M \end{pmatrix}$$

είναι θετική (δηλαδή > 0), θα έχουμε δείξει ότι η διατεταγμένη βάση $\left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} v_i, v_1, \cdots, v_{n-1} \right)$ είναι θετικά προσανατολισμένη. Η απόδειξη είναι άμεση δεδομένου του τύπου της ορίζουσας.

$$\det \begin{pmatrix} \bigwedge_{i=1}^{n-1} v_i \\ M \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} (-1)^{1+k} \det(M_{-,k}) \det(M_{-,k}) = \sum_{k=1}^{n} [\det(M_{-,k})]^2 > 0$$

□

2 Στοιχεία διαφορικού λογισμού

2.1 Βασικές έννοιες

Ορισμός 2.1. (Διαφορικό συνάρτησης). Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^m$ με $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (το σύνολο στο οποίο ορίζεται η διαφορισιμότητα είναι ανοικτό σύνολο, συνήθως όμως θα παραλείπουμε να το γράφουμε) και $x_0 \in A$. Θα λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο x_0 εάν υπάρχει γραμμική συνάρτηση T_{x_0} τέτοια ώστε:

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - T_{x_0} h|}{|h|} = 0$$

Εάν η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε $x_0 \in A$, θα λέμε ότι είναι διαφορίσιμη στο A. Επιπλέον, η συνάρτηση $x_0 \mapsto T_{x_0}$ λέγεται διαφορικό της f και συμβολίζεται (συνήθως) με $d(f)$. Ο τελεστής (διαφορικό) d για τον οποίον $f \mapsto d(f)$ είναι γραμμικός, οπότε θα συμβολίζουμε $df = d(f)$. Το διαφορικό της f στο σημείο x_0 είναι γραμμική συνάρτηση και συμβολίζεται με $d(f)(x_0)$ ή $\big(d(f)\big)_{x_0}$ ή $(df)_{x_0}$.

Φυσικά, διαφορισιμότητα μπορεί να οριστεί και σε περιπλοκότερα σύνολα, προσεγγίζοντας ≪απ' όπου≫ μπορεί να γίνει προσέγγιση.

Πρόταση 2.1.

i. Εάν το διαφορικό μιας συνάρτησης $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ υπάρχει στο $x_0 \in A$, τότε:

$$(df)_{x_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{x_0}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{x_0} \right) =: (\nabla f)_{x_0}$$

ii. Εάν το διαφορικό μιας συνάρτησης $f = (f_1, \cdots, f_m) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ υπάρχει στο $x_0 \in A$, τότε:

$$(df)_{x_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{x_0} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}\Big|_{x_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\Big|_{x_0} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}\Big|_{x_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\nabla f_1)_{x_0} \\ \vdots \\ (\nabla f_m)_{x_0} \end{pmatrix} =: (Df)_{x_0}$$

Απόδειξη: Για το i.: Πράγματι, εάν η f είναι διαφορίσιμη, για τα παρακάτω όρια θα ισχύει:

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{|f(x_0 + h_i e_i) - f(x_0) - (df)_{x_0} h_i e_i|}{|h_i|} = 0$$

και κατ' επέκταση $\langle (df)_{x_0}, e_i \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{x_0}$. Δηλαδή:

$$(df)_{x_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{x_0}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{x_0} \right) =: (\nabla f)_{x_0}$$

Για το ii.: Εφαρμόζοντας το i. για καθεμία από τις συντεταγμένες συναρτήσεις f_i έπεται:

$$(df_i)_{x_0} = (\nabla f_i)_{x_0}$$

δηλαδή:

$$(df)_{x_0} = \begin{pmatrix} (df_1)_{x_0} \\ \vdots \\ (df_m)_{x_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{x_0} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}\Big|_{x_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\Big|_{x_0} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}\Big|_{x_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\nabla f_1)_{x_0} \\ \vdots \\ (\nabla f_m)_{x_0} \end{pmatrix} =: (Df)_{x_0}$$

□

Θεώρημα 2.1. (Κανόνας της αλυσίδας).

i. Θεωρούμε συναρτήσεις $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ και $g : B \subseteq \mathbb{R}^n \to A \subseteq \mathbb{R}^m$. Εάν αμφότερες είναι διαφορίσιμες, τότε η σύνθεση $f \circ g$ είναι διαφορίσιμη και:

$$d(f \circ g) = (df)_g \cdot dg$$

ii. Εάν οι f και $g = (g_1, \cdots, g_m)$ είναι όπως στο i. και $n = 1$, τότε:

$$\frac{d(f \circ g)}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_g \frac{dg_i}{dx}$$

iii. Γενικότερα, εάν οι f, g είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ και $g : B \subseteq \mathbb{R}^n \to A \subseteq \mathbb{R}^m$ αντίστοιχα, τότε:

$$D(f \circ g) = (Df)_g \cdot Dg$$

Απόδειξη: Για το i.: Ουσιαστικά στο μόνο κομμάτι που θα χρειαστεί να κάνουμε κάποια απόδειξη είναι το i.

Επειδή η g είναι διαφορίσιμη (έστω στο $x \in B$), θα υπάρχει συνάρτηση ε_g (που θα εξαρτάται από το εκάστοτε x) τέτοια ώστε:

$$g(x+h) - g(x) - dg \cdot h = |h| \cdot \varepsilon_g(h), \text{ με } \varepsilon_g(h) \xrightarrow{h \to 0} 0$$

και αντίστοιχα για την f:

$$f(x+h) - f(x) - df \cdot h = |h| \cdot \varepsilon_f(h), \text{ με } \varepsilon_f(h) \xrightarrow{h \to 0} 0$$

Επιπλέον, εάν η σύνθεση $f \circ g$ είναι διαφορίσιμη, θα υπάρχει (όπως και πριν) μια συνάρτηση $\varepsilon_{f \circ g}$ τέτοια ώστε:

$$f \circ g(x+h) - f \circ g(x) - d(f \circ g) \cdot h = |h| \cdot \varepsilon_{f \circ g}(h), \text{ με } \varepsilon_{f \circ g}(h) \xrightarrow{h \to 0} 0$$

Ας μελετήσουμε πρώτα την τιμή $f \circ g(x+h)$ για να προσδιορίσουμε εάν πράγματι η σύνθεση είναι διαφορίσιμη. Χρησιμοποιώντας τη σχέση διαφορισιμότητας της g, αντικαθιστούμε την τιμή $g(x+h)$ στη σύνθεση $f \circ g$ και έχουμε:

$$f \circ g(x+h) = f\big(g(x) + dg \cdot h + |h| \cdot \varepsilon_g(h)\big)$$

Θέτουμε $\eta = |h|(dg \cdot \widehat{h} + \varepsilon_g(h))$ και παρατηρούμε ότι $\eta \to 0$ καθώς $h \to 0$. Επιπλέον:

$$f\big(g(x) + dg \cdot h + |h| \cdot \varepsilon_g(h)\big) = f\big(g(x) + \eta\big)$$

Τέλος, από τη σχέση διαφορισιμότητας της f:

$$f\big(g(x)+\eta\big) - f\big(g(x)\big) - (df)_g \cdot \eta = |\eta| \cdot \varepsilon_f(\eta) \Rightarrow$$

κι επειδή $g(x) + \eta = g(x+h),\ \eta = |h| \cdot (dg \cdot \widehat{h} + \varepsilon_g(h))$, έχουμε:

$$f \circ g(x+h) - f \circ g(x) - (df)_g \cdot \big[|h|(dg \cdot \widehat{h} + \varepsilon_g(h)\big] = \big||h| \cdot \varepsilon_g(h)\big| \cdot \varepsilon_f\big(|h| \cdot \varepsilon_g(h)\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \circ g(x+h) - f \circ g(x) - (df)_g \cdot dg(h) = |h|\big[(df)_g \cdot \varepsilon_g(h) + \varepsilon_f(h) \cdot \varepsilon_f\big(|h| \cdot \varepsilon_g(h)\big)\big]$$

Οπότε αν θέσουμε $\varepsilon_{f\circ g}(h) = (df)_g \cdot \varepsilon_g(h) + \varepsilon_f(h) \cdot \varepsilon_f\big(|h| \cdot \varepsilon_g(h)\big)$ θα έχουμε $\varepsilon_{f\circ g}(h) \xrightarrow{h\to 0} 0$ και:

$$f \circ g(x+h) - f \circ g(x) - (df)_g \cdot dg(h) = |h| \cdot \varepsilon_{f\circ g}(h)$$

δηλαδή:

$$\frac{|f \circ g(x+h) - f \circ g(x) - (df)_g \cdot dg(h)|}{|h|} = |\varepsilon_{f\circ g}(h)| \xrightarrow{h\to 0} 0$$

το οποίο είναι ο ορισμός της διαφορισιμότητας της $f \circ g$. Αυτό δείχνει ότι $d(f \circ g) = (df)_g \cdot dg$.

Για το ii.: Το διαφορικό της f είναι ακριβώς ∇f (από την **Πρόταση 2.1, i.**) και το διαφορικό της g είναι ακριβώς (η «στήλη») $\left(\dfrac{dg_i}{dx}\right)_{i=1}^{m}$ (από την **Πρόταση 2.1, ii.**). Χρησιμοποιώντας το i. έχουμε το ζητούμενο.

$$\frac{d(f\circ g)}{dx} = (\nabla f)_g \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{dg_1}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{dg_m}{dx} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_g \frac{dg_i}{dx}$$

Για το iii.: Γράφουμε:

$$D(f\circ g) = \begin{pmatrix} \nabla(f\circ g)_1 \\ \vdots \\ \nabla(f\circ g)_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla(f_1\circ g) \\ \vdots \\ \nabla(f_p\circ g) \end{pmatrix}$$

κι επειδή $\nabla(f_1 \circ g) = d(f_1 \circ g)$, από το i. έχουμε:

$$D(f\circ g) = \begin{pmatrix} (df_1)_g \cdot dg \\ \vdots \\ (df_p)_g \cdot dg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (df_1)_g \\ \vdots \\ (df_p)_g \end{pmatrix} \cdot dg$$

Από την **Πρόταση 2.1, ii.** έπεται το ζητούμενο:

$$D(f\circ g) = (Df)_g \cdot Dg$$

□

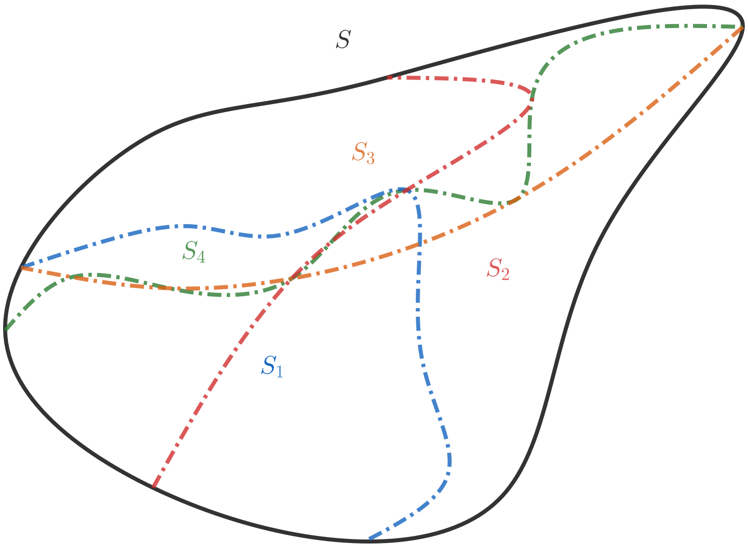
2.2 Διαφορίσιμες διαμερίσεις της μονάδος

Για τη μελέτη θεωρημάτων επέκτασης και θεμάτων ολοκληρωτικού λογισμού είναι χρήσιμη η έννοια των (ομαλών) διαμερίσεων της μονάδας. Ξεκινούμε με τον ορισμό.

Ορισμός 2.2. (Ομαλές διαμερίσεις της μονάδος). Θεωρούμε ένα συμπαγές σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ και ένα σχετικά ανοικτό κάλυμμά του $\{S_i\}_{i\in[m]} \subseteq \mathscr{O}(S)$. Μια πεπερασμένη οικογένεια ομαλών συναρτήσεων $\{\delta_j\}_{j\in[m]} \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ με φραγμένο φορέα θα λέγεται διαμέριση της μονάδος στο S εάν:

- Για κάθε δείκτη $j \in [m]$ έχουμε $\delta_j(\mathbb{R}^n) \subseteq [0,1]$
- Για κάθε δείκτη $j \in [m]$ υπάρχει $i_j \in [m]$ τέτοιο ώστε $S \cap \operatorname{supp} \delta_{i_j} \subseteq S_{i_j}$

- Για κάθε $x \in S$ ισχύει $\left(\sum_{j\in[m]} \delta_j\right)(x) = 1$, δηλαδή $\sum_{j\in[m]} \delta_j|_S \equiv 1$.



Δεν είναι καθόλου τετριμμένο ότι σε κάθε συμπαγές σύνολο μπορεί να βρεθεί διαμέριση της μονάδας (δοθέντων σχετικά ανοικτών συνόλων που το καλύπτουν). Στη συνέχεια λοιπόν θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε την ύπαρξη.

Λήμμα 2.1.

i. Υπάρχει C^∞ συνάρτηση $\delta_{(0,1)} : \mathbb{R} \to [0,1]$ με $\operatorname{supp} \delta_{(0,1)} = (0,1)$.

ii. Υπάρχει C^∞ συνάρτηση $\delta_{(a,b)} : \mathbb{R} \to [0,1]$ με $\operatorname{supp} \delta_{(a,b)} = (a,b)$ (εννοείται $a < b$).

iii. Υπάρχει C^∞ συνάρτηση $\delta_\gamma : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ με $\operatorname{supp} \delta_\gamma = \prod_{i\in[n]}(a_i, b_i)$ (εννοείται $a_i < b_i$ και $n \in \mathbb{N}$).

■

Απόδειξη: Για το i., θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-1/x}\chi_{(0,1)}(x)$, η οποία είναι C^∞. Έπειτα, ορίζουμε συνάρτηση:

$$\delta_{(0,1)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ με } \delta_{(0,1)}(x) = f(x) \cdot f(1-x)$$

και παρατηρούμε ότι κι αυτή είναι C^∞ (π.χ. πολλαπλές συνθέσεις, σε συνδυασμό με το **Θεώρημα 2.1, i.**). Επιπλέον:

$$\operatorname{supp} \delta_{(0,1)} = \big(\chi_{0,\infty}(\cdot) \cdot \chi_{(0,\infty)}(1-\cdot)\big)(\mathbb{R}) = \big(\chi_{0,\infty}(\cdot) \cdot \chi_{(-\infty,1)}(\cdot)\big)(\mathbb{R}) = (0,1)$$

και $0 \leqslant \delta_{(0,1)} \leqslant 1$.

Για το ii., το αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει με κατάλληλη «συστολοδιαστολή». Ειδικότερα, αν ορίσουμε:

$$\delta_{(a,b)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ με } \delta_{(0,1)}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

τότε $\delta_{(a,b)} \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ και $a < x < b \Leftrightarrow 0 < (x-a)/(b-a) < 1$, δηλαδή $\operatorname{supp} \delta_{(a,b)} = (a,b)$. Το ότι $0 \leqslant \delta_{(0,1)} \leqslant 1$ είναι εμφανές.

Δεδομένου του ii., μπορούμε να αποδείξουμε το iii.. Ορίζουμε:

$$\delta_\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ με } \delta_\gamma(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i\in[n]} \delta_{(a_i,b_i)}(x_i)$$

και παρατηρούμε ότι $\delta_\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, $0 \leqslant \delta_\gamma \leqslant 1$, και επιπλέον:

$$\operatorname{supp} \delta_\gamma = \sum_{i\in[n]} \hat{\varpi}_i^n\big((a_i,b_i)\big) = \prod_{i\in[n]} (a_i,b_i)$$

(αφού $\operatorname{supp} \delta_{(a_i,b_i)} = (a_i,b_i)$).

□

Θεώρημα 2.2. (Ύπαρξη (ομαλών) διαμερίσεων της μονάδος για συμπαγή σύνολα). Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές σύνολο και ένα σχετικά ανοικτό κάλυμμά του $\{S_i\}_{i\in[m]} \subseteq \mathscr{O}(S)$. Τότε υπάρχει οικογένεια $\{\delta_j\}_{j\in[m]} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ που να αποτελεί διαμέριση της μονάδος στο S.

Απόδειξη: Θεωρήστε την οικογένεια όλων των ανοικτών ορθογωνίων του $\mathbb{R}^n$. Αυτή αποτελεί κάλυψη του συμπαγούς S, οπότε υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{I_i\}_{i\in[m]}$ του S αποτελούμενο από ανοικτά ορθογώνια. Ιδιαιτέρως, η οικογένεια $\{S_i = I_i \cap S\}_{i\in[m]}$ αποτελεί σχετικά ανοικτή κάλυψη του S.

Βάσει του **Λήμματος 2.1** υπάρχουν συναρτήσεις $\tilde{\delta}_i : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ με $\operatorname{supp} \tilde{\delta}_i = I_i$. Εάν λοιπόν ορίσουμε:

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ με } \varphi = \sum_{i\in[m]} \tilde{\delta}_i$$

τότε παρατηρούμε ότι η φ είναι φραγμένη, και συνεπώς οι συναρτήσεις:

$$\delta_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ με } \delta_i = \tilde{\delta}_i \Big/ \varphi \cdot \chi_{\bigcup_{i\in[m]} I_i} + \chi_{(\bigcup_{i\in[m]} I_i)^c}$$

είναι $C^\infty(\mathbb{R}^n;[0,1])$, έχουν φορέα $\operatorname{supp} \delta_i = \operatorname{supp} \tilde{\delta}_i = I_i$ και:

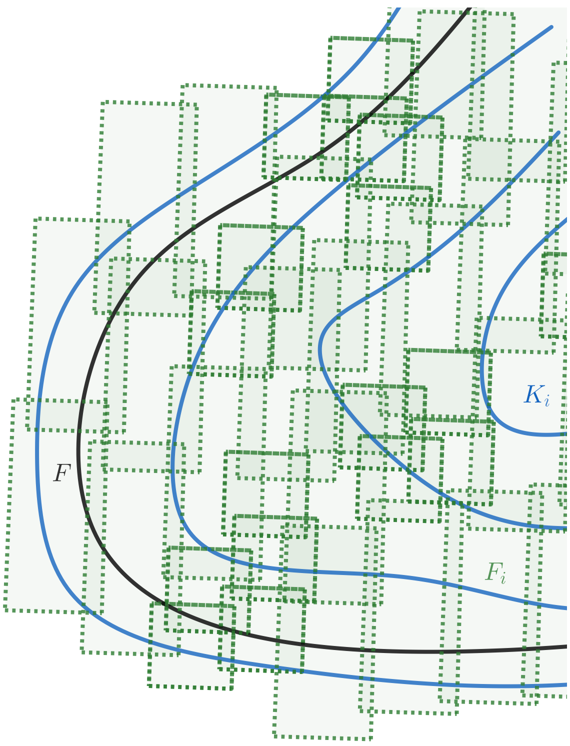
$$\left(\sum_{i\in[m]} \delta_i\right)\Bigg|_S = \left(\sum_{i\in[m]} \tilde{\delta}_i \Big/ \varphi \cdot \chi_{\bigcup_{i\in[m]} I_i} + \chi_{(\bigcup_{i\in[m]} I_i)^c}\right)\Bigg|_S \equiv 1$$

□

Γενικά ορίζουμε τις διαμερίσεις της μονάδος σε συμπαγή υποσύνολα $S \subseteq \mathbb{R}^n$, είναι δυνατόν όμως να βρεθεί αντίστοιχη οικογένεια συναρτήσεων και για μη φραγμένα σύνολα. Αυτό θα το δούμε αναλυτικότερα με το επόμενο λήμμα και θεώρημα.

Λήμμα 2.2. Έστω $F \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα κλειστό σύνολο. Υπάρχει (αριθμήσιμη) ανοικτή κάλυψη $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ του F, τοπικά πεπερασμένη. Δηλαδή, για κάθε $x \in F$ υπάρχουν πεπερασμένα στο πλήθος σύνολα F_i στα οποία το x ανήκει. ■

Απόδειξη:



Θεωρούμε ακολουθία συνόλων $\{K_i\}_{i\in I}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ που εξαντλούν το F με την εξής έννοια:

- Το σύνολο $\bigcup_{i\in I} K_i$ είναι υπερσύνολο του F.
- Για κάθε $i < j \in I$, $K_i \Subset K_j$.

Επειδή ο $\mathbb{R}^n$ είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, υπάρχει επιλογή τέτοιων K_i που οδηγεί σε αριθμήσιμη οικογένεια. Επιλέγουμε αυτήν - χωρίς βλάβη της γενικότητας - ως την αρχική μας οικογένεια $\{K_i\}_{i\in I}$, οπότε γράφουμε $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ (ενδεχομένως μετά από επανα-ονοματοδότηση).

Μ' αυτόν τον τρόπο έχουμε (γεωμετρικά μιλώντας) δημιουργήσει ανοικτούς ≪δακτυλίους≫ $K_{i+1}^\circ\backslash\overline{K}_i$ οι οποίοι καλύπτουν όλο το F. Καλύπτουμε έπειτα καθέναν (συμπαγή) δακτύλιο $\overline{K_{i+1}^\circ\backslash\overline{K}_i}$ από πεπερασμένο πλήθος ανοικτών διαστημάτων,[1] και θεωρούμε $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ την οικογένεια όλων αυτών των διαστημάτων, που έχουν επιλεγεί από τις καλύψεις όλων των συμπαγών δακτυλίων.

Από τον ορισμό της $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, αποτελεί κάλυψη του F και κάθε $x\in F$ ανήκει σε πεπερασμένο πλήθος τέτοιων F_i.

$\square$

Θεώρημα 2.3. (Διαμερίσεις της μονάδας για μη φραγμένα σύνολα). Έστω F ένα κλειστό σύνολο και $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ μια τοπικά πεπερασμένη αριθμήσιμη ανοικτή κάλυψη του F (τέτοια κάλυψη υπάρχει από το **Λήμμα 2.2**). Υπάρχουν C^∞ συναρτήσεις $\delta_j,\ j\in\mathbb{N}$ τέτοιες ώστε:

- Για κάθε δείκτη $j\in\mathbb{N}$ έχουμε $\delta_j(\mathbb{R}^n)\subseteq[0,1]$.
- Για κάθε $j\in\mathbb{N}$ υπάρχει $i_j\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $F\cap\operatorname{supp}\delta_{i_j}\subseteq F_{i_j}$.
- Για κάθε $x\in F$ ισχύει $\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}\delta_j\right)(x)=1$, δηλαδή $\sum_{j\in\mathbb{N}}\delta_j|_F\equiv 1$.

Απόδειξη: Η απόδειξη του θεωρήματος είναι ανάλογη του **Θεωρήματος 2.2**, μόνο χρειάζεται να δικαιολογηθεί η επιλογή της αντίστοιχης φ. Κανείς μπορεί να ισχυριζόταν ότι εδώ δεν είναι δυνατόν να οριστεί συνάρτηση φ ως άθροισμα των $\tilde{\delta}_i$, αφού ενδέχεται σε σημεία να απειρίζεται. Όμως λόγω του ≪τοπικά πεπερασμένου≫ της κάλυψης, για κάθε x οι όροι που αθροίζονται είναι πεπερασμένοι στο πλήθος, αφού το x ανήκει σε πεπερασμένα μόνο F_i.

$\square$

2.3 Θεωρήματα ομαλής επέκτασης

Μερικά αρχικά θεωρήματα ομαλής επέκτασης είναι συνέπεια των θεωρημάτων που αποδείξαμε για τις διαμερίσεις της μονάδας. Δύο απλά θα διατυπώσουμε παρακάτω - μάλιστα το δεύτερο εξ αυτών θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη ενός ≪μεγαλύτερου≫ θεωρήματος, αυτού της επέκτασης του Seeley.

Πρόταση 2.2. Έστω F ένα συμπαγές σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει συνάρτηση $\delta_F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ που να είναι C^∞ και επιπλέον $\delta_F|_F\equiv 1$.

Απόδειξη: Θεωρούμε ένα ανοικτό σύνολο U τέτοιο ώστε $F\Subset U$, καθώς επίσης και ένα κλειστό ορθογώνιο $U\Subset I$. Τα σύνολα $U, I\backslash F$ αποτελούν κάλυμμα του I και είναι σχετικώς ανοικτά στο I. Από το **Θεώρημα 2.2**, υπάρχουν C^∞ συναρτήσεις δ_1, δ_2 τέτοιες ώστε:

- $\delta_i(\mathbb{R}^n)\subseteq[0,1]$ για $i\in\{1,2\}$.
- $I\cap\operatorname{supp}\delta_1\subseteq U$ και $I\cap\operatorname{supp}\delta_2\subseteq I\backslash F$.
- Για κάθε $x\in I$ ισχύει $(\delta_1+\delta_2)(x)=1$.

Ειδικά για τη συνάρτηση δ_1, παρατηρούμε ότι $\delta_1|_F\equiv 1$, αφού η δ_2 μηδενίζεται στο σύνολο:

$$(\operatorname{supp}\delta_2)^c\supseteq(I\backslash F)^c=F$$

κι επιπλέον $(\delta_1+\delta_2)|_I\equiv 1$.

$\square$

Παρατήρηση 2.1. Για την ειδική περίπτωση του $\mathbb{R}$, θεωρούμε ένα διάστημα I. Σύμφωνα με την **Πρόταση 2.2**, υπάρχει C^∞ συνάρτηση δ_I με φραγμένο φορέα ούτως ώστε $\delta_I|_I\equiv 1$ και $F\Subset\operatorname{supp}\delta_I$.

[1]Θεωρούμε συμπαγείς δακτυλίους για να επικαλεστούμε την πεπερασμένη κάλυψη - φυσικά το αποτέλεσμα θα ίσχυε και με ανοικτούς δακτυλίους.

Πρόταση 2.3. (Ομαλό λήμμα του Urisohn). Έστω F, K δύο συμπαγή και ξένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει C^∞ συνάρτηση $\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\delta|_F \equiv 0$ και $\delta|_K \equiv 1$. Το θεώρημα έχει αντίστοιχη εκδοχή για μη φραγμένα σύνολα, κάνοντας χρήση του **Θεωρήματος 2.3**.

Απόδειξη: Η απόδειξη μοιάζει αρκετά μ' αυτήν της **Πρότασης 2.2**. Συνοπτικά, θεωρήστε ανοικτό U με $K \Subset U$ και κλειστό διάστημα I με $K \cup F \Subset I$. Υπάρχουν C^∞ συναρτήσεις δ_1, δ_2 με $\operatorname{supp} \delta_1 = U$, $\operatorname{supp} \delta_2 = I \backslash K$ και $(\delta_1 + \delta_2)|_I \equiv 1$. Η δ_1 έχει την ιδιότητα $\delta_1|_K \equiv 1$ και $\delta_1|_{I\backslash U} \equiv 0 \Rightarrow \delta_1|_F = 0$.

□

Στη συνέχεια θα προχωρίσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος επέκτασης του Seeley.[2] Χρειάζεται να κάνουμε κάποια προετοιμασία, αποδεικνύοντας ένα βασικό λήμμα.

Λήμμα 2.3. Υπάρχουν ακολουθίες $(a_k)_{k=0}^\infty, (b_k)_{k=0}^\infty$ πραγματικών αριθμών τέτοιες ώστε:

i. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $b_k < 0$.

ii. Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$, $\sum_{k=0}^\infty |a_k| \cdot |b_k|^n < \infty$, και επιπλέον,

iii. Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$, $\sum_{k=0}^\infty a_k \cdot b_k^n = 1$.

iv. Καθώς $k \to \infty$, $b_k \to -\infty$.

■

Απόδειξη: Ορίζουμε γι' αρχή τις ενδιάμεσες ακολουθίες:

$$A_k = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1+2^j}{2^j - 2^k} \textbf{ και } B_{k,\ell} = \prod_{j=k+1}^{\ell} \frac{1+2^j}{2^j - 2^k}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$|A_k| \leqslant \prod_{j=0}^{k-1} 2^{j-k+2} = 2^{-(k^2-3k)/2}$$

αφού $2^j - 2^k \geqslant 2^{k+1} - 2^k = 2^k$ και $1 + 2^j \leqslant 2^{j+2}$. Επιπλέον:

$$0 < \log B_{k,\ell} = \sum_{j=k+1}^{\ell} \log\left(1 + \frac{1+2^k}{2^j - 2^k}\right) \overset{\star}{<} \sum_{j=k+1}^{\ell} \frac{1+2^k}{2^j - 2^k} < 4$$

όπου στη σχέση άστρο ($\star$) χρησιμοποιείται η γνωστή ιδιότητα του λογαρίθμου $\log x \leqslant x - 1$ (με την ισότητα εάν και μόνο αν $x = 1$). Αυτά μας δείχνουν ότι η ακολουθία (ως προς ℓ) $B_{k,\ell}$ είναι γνησίως αύξουσα και (αφού είναι και φραγμένη) συγκλίνει σ' έναν αριθμό $0 < B_k \leqslant e^4$.

Ορίζουμε τώρα $a_k = A_k B_k$ και $b_k = -2^k$. Έχουμε:

$$|a_k| < e^4 \cdot 2^{-(k^2-3k)/2}, \text{ οπότε } |a_k| \cdot |b_k|^n < e^4 \cdot 2^{kn-(k^2-3k)/2} \lll 2^{-k^2}$$

κι επομένως:

$$\sum_{k=0}^\infty |a_k| \cdot |b_k|^n < \infty, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}_0$$

Επιπλέον, αν θέσουμε $a_{k,\ell} = A_k B_{k,\ell}$ για $k \leqslant \ell$ και $a_{k,\ell} = 0$ διαφορετικά, θα έχουμε:

$$\sum_{k=0}^\infty a_{k,\ell} b_k^n = 1, \text{ για } \ell \geqslant n$$

Επειδή $|a_{k,\ell}| \cdot |b_k|^n \leqslant |a_k| \cdot |b_k|^n$ και το άθροισμα της δεύτερης συγκλίνει, η πρώτη θα συγκλίνει. Εξ ορισμού των ακολουθιών:

$$\sum_{k=0}^\infty a_k b_k^n = \lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=0}^\infty a_{k,\ell} b_k^n = 1$$

□

Με αυτά μπορούμε να προβούμε στην κύρια απόδειξη του θεωρήματος επέκτασης του Seeley (μάλιστα αρκεί να χρησιμοποιηθεί η **Πρόταση 2.2** ή η **Πρόταση 2.3**, σε συνδιασμό με το **Λήμμα 2.3**). Υπάρχει κι ένα άλλο κομμάτι της απόδειξης το οποίο στα δικά μας πλαίσια εν γένει δεν χρησιμοποιείται: συγκεκριμένα ο (γραμμικός) τελεστής E που ορίζει την επέκταση $E : f \mapsto Ef$ είναι συνεχής. Εμείς θα αποδείξουμε κι αυτό το κομμάτι του θεωρήματος, κατ' αρχάς τιμητικά, κατά δεύτερον (όπως εξάλλου αναφέρει και ο Seeley) η συνέχεια του τελεστή προσδίδει μια παραπάνω ≪δομή≫ στην επέκταση και τη διαφοροποιεί από θεωρήματα όπως αυτό του Whitney.[4], **Θεώρημα 4.1.5.1**
Ορίζουμε λοιπόν τα ακόλουθα:

Ορισμός 2.3. (Ημινόρμες στους χώρους $C^k(A)$, $k \in \mathbb{N}_0$). Έστω A ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και ένα συμπαγές $K \Subset A$. Για $f \in C^k(A)$ με $k \in \mathbb{N}_0$ ορίζουμε:

$$||f||_k^K := \sum_{|a| \leqslant k} \frac{1}{\prod_{i=1}^n (a_i!)} \sup_K \left| \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_n^{a_n}} \right|$$

όπου $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$ και $|a| = a_1 + \cdots + a_n$. Για να γίνει λίγο πιο υποφερτός ο συμβολισμός, συνήθως συμβολίζουμε:

$$\partial^a f := \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_n^{a_n}}$$

Η $||f||_k^K$ είναι μια ημινόρμα $f \mapsto ||f||_k^K \geqslant 0$. Δηλαδή:

i. $||f||_k^K \geqslant 0$ και $f = 0 \Rightarrow ||f||_k^K = 0$.

ii. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε $||\lambda f||_k^K = |\lambda| \cdot ||f||_k^K$

iii. Ισχύει η τριγωνική ανισότητα $||f + g||_k^K \leqslant ||f||_k^K + ||g||_k^K$

Απόδειξη: Από τον ορισμό έπονται τα i., ii., iii..

□

Από τις ημινόρμες μπορούν να οριστούν μετρικές με τον ακόλουθο τρόπο:

Ορισμός 2.4. (Μετρικές στους $C^k(A)$, $k \in \overline{\mathbb{N}}_0$). Θεωρούμε και πάλι $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και μια ακολουθία συμπαγών συνόλων $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ με $K_i \Subset K_{i+1}$ και $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. Αν $f, g \in C^k(A)$ με $k < \infty$, ορίζουμε:

$$\varrho(f, g) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{||f - g||_k^{K_i}}{1 + ||f - g||_k^{K_i}}$$

Αν $k = \infty$, ορίζουμε:

$$\varrho(f, g) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{||f - g||_i^{K_i}}{1 + ||f - g||_i^{K_i}}$$

Οι ϱ είναι μετρικές, δηλαδή:

i. $\varrho(f, g) \leqslant 0$

ii. $\varrho(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$ στο A

iii. Ισχύει η συμμετρία $\varrho(f, g) = \varrho(g, f)$

iv. Ισχύει η τριγωνική ανισότητα $\varrho(f, h) \leqslant \varrho(f, g) + \varrho(g, h)$

Απόδειξη: Γενικά οι ιδιότητες είναι άμεσες από τον ορισμό, αυτή που ίσως χρειαστεί την προσοχή μας είναι η iv.. Κατ' αρχάς για κάθε συμπαγές υποσύνολο $K \Subset A$, λόγω του ότι η $||f||_k^K$ είναι ημινόρμα:

$$||f - g + g - h)||_k^K \leqslant ||f - g||_k^K + ||g - h||_k^K$$

κι έπειτα, επειδή η $x \mapsto x/(1 + x)$ είναι αύξουσα:

$$\begin{aligned} \frac{||f - g + g - h||_k^K}{1 + ||f - g + g - h||_k^K} &\leqslant \frac{||f - g||_k^K + ||g - h||_k^K}{1 + ||f - g||_k^K + ||g - h||_k^K} \\ &= \frac{||f - g||_k^K}{1 + ||f - g||_k^K + ||g - h||_k^K} + \frac{||g - h||_k^K}{1 + ||f - g||_k^K + ||g - h||_k^K} \\ &\leqslant \frac{||f - g||_k^K}{1 + ||f - g||_k^K} + \frac{||g - h||_k^K}{1 + ||g - h||_k^K} \end{aligned}$$

Από το τελευταίο έπεται η ιδιότητα iv..

□

Οι μετρικές ϱ εξαρτώνται από την επιλογή της ακολουθίας $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, όμως αυτό που ουσιαστικά μας ενδιαφέρει, δηλαδή η σύγκλιση, δεν εξαρτάται από τα εκάστοτε συμπαγή K_i. Αυτό το αποδεικνύουμε με την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.4. Έστω $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ μια ακολουθία του $C^k(A)$, όπου $k \in \overline{\mathbb{N}}_0$ και $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Τότε $f_j \to 0$ εάν και μόνο αν για κάθε συμπαγές $K \Subset A$ και για κάθε πολυδείκτη a με $|a| \leqslant k$, η ακολουθία $\partial^a f \to 0$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K.

Απόδειξη: Θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση όπου $k < \infty$ - η άλλη μπορεί να αντιμετωπιστεί με ανάλογο τρόπο. Εάν $f_j \to 0$, τότε φυσικά $\sup_K |\partial^a f| \to 0$ για κάθε δείκτη a (με $|a| \leqslant k$) και για κάθε συμπαγές $K \Subset A$.

Αντιστρόφως, επιλέγουμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει ένα $\ell_\varepsilon \in \mathbb{N}$ για το οποίο $\sum_{i>\ell_\varepsilon} 1/2^i < \varepsilon/2$ και κατ' επέκταση:

$$\sum_{i=\ell_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{||f_j||_k^{K_i}}{1+||f_j||_k^{K_i}} < \sum_{i=\ell_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Εν τω μεταξύ, επειδή $\sup_K |\partial^a f| \to 0$ για κάθε δείκτη a (με $|a| \leqslant k$) και για κάθε συμπαγές $K \Subset A$, υπάρχουν δείκτες $j_1, \cdots, j_{\ell_\varepsilon}$ τέτοιοι ώστε $||f_j||_k^{K_i} < \varepsilon/2$ για κάθε $j \geqslant j_1, \cdots, j_{\ell_\varepsilon}$. Επιλέγουμε $j_0 = \max\{j_1, \cdots, j_{\ell_\varepsilon}\}$ και σε συνδυασμό με τον ορισμό του ℓ_ε έχουμε:

$$\begin{aligned}
\varrho(f_j, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{||f_j||_k^{K_i}}{1+||f_j||_k^{K_i}} &= \sum_{i=1}^{\ell_\varepsilon} \frac{1}{2^i} \frac{||f_j||_k^{K_i}}{1+||f_j||_k^{K_i}} + \sum_{i=\ell_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{||f_j||_k^{K_i}}{1+||f_j||_k^{K_i}} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{\ell_\varepsilon} \frac{1}{2^i} \frac{\varepsilon/2}{1+\varepsilon/2} + \sum_{i=\ell_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\
&\leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon
\end{aligned}$$

οπότε $f_j \to 0$.

□

Θεώρημα 2.4. (Θεώρημα C^∞ επέκτασης του Seeley). Έστω f μια συνάρτηση η οποία είναι C^∞ σε έναν ημιχώρο $\mathbb{R}^n_{i,+}$, δηλαδή $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n_{i,+}; \mathbb{R})$. Εάν τα όρια:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\partial^{|\lambda|} f}{\partial x_1^{\lambda_1} \cdots \partial t^{\lambda_i} \cdots \partial x_n^{\lambda_n}} \big(\varpi_i^n(t) + \hat{\varpi}_i^n(x)\big)$$

υπάρχουν (στο $\mathbb{R}$) για κάθε πολυδείκτη λ με $|\lambda| \in \mathbb{N}_0$, τότε:

i. Υπάρχει C^∞ επέκταση $\tilde{f}$ της f, δηλαδή συνάρτηση $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ τέτοια ώστε:

$$\left.\frac{\partial^{|\lambda|} \tilde{f}}{\partial x_1^{\lambda_1} \cdots \partial t^{\lambda_i} \cdots \partial x_n^{\lambda_n}}\right|_{\mathbb{R}^n_{i,+}} = \frac{\partial^{|\lambda|} f}{\partial x_1^{\lambda_1} \cdots \partial t^{\lambda_i} \cdots \partial x_n^{\lambda_n}}$$

ii. Ο τελεστής E που ορίζει την επέκταση $E : f \mapsto Ef = \tilde{f}$ είναι γραμμικός και συνεχής.

Απόδειξη: Για το i.: Χρησιμοποιώντας την **Πρόταση 2.3** μπορεί να βρεθεί C^∞ συνάρτηση φ με την ιδιότητα $\varphi([0,1]) = \{1\}$ και $\varphi\big([2,\infty)\big) = \{0\}$ (μάλιστα εδώ μπορεί να γίνει χρήση της **Πρότασης 2.2** αντί της **2.3**, και να βρεθεί αντίστοιχη συνάρτηση φ). Για κάθε $t < 0$ ορίζουμε:

$$\tilde{f}\big(\varpi_i^n(t) + \hat{\varpi}_i^n(x)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi(b_k t) f\big(\varpi_i^n(b_k t) + \hat{\varpi}_i^n(x)\big)$$

ενώ για $t > 0$:

$$\tilde{f}\big(\varpi_i^n(t) + \hat{\varpi}_i^n(x)\big) = f\big(\varpi_i^n(t) + \hat{\varpi}_i^n(x)\big)$$

όπου οι ακολουθίες $(a_k)_{k=0}^{\infty}$, $(b_k)_{k=0}^{\infty}$ είναι όπως στο **Λήμμα 2.3**. Η $\tilde{f}$ στον ημιχώρο $\mathbb{R}^n_{i,+}$ είναι C^∞, από τον ορισμό της - παρατηρήστε ότι το άθροισμα από το οποίο η $\tilde{f}$ προκύπτει είναι πεπερασμένο για κάθε $t < 0$ (αφού η φ είναι τελικά μηδενική), οπότε ορίζεται καλά και είναι (τοπικά) πεπερασμένο άθροισμα C^∞ συναρτήσεων.

Παραγωγίζοντας την $\tilde{f}$ στον ημιχώρο $t<0$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x_1^{\lambda_1}\cdots\partial t^{\lambda_i}\cdots\partial x_n^{\lambda_n}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\varphi(b_kt)f\big(\varpi_i^n(b_kt)+\hat{\varpi}_i^n(x)\big)\right)=\\
&=\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k^{\lambda_i}\varphi(b_kt)b_k^{\lambda_i}\frac{\partial^{|\lambda|}f}{\partial x_1^{\lambda_1}\cdots\partial t^{\lambda_i}\cdots\partial x_n^{\lambda_n}}\big(\varpi_i^n(b_kt)+\hat{\varpi}_i^n(x)\big)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k^{2\lambda_i}\varphi(b_kt)\frac{\partial^{|\lambda|}f}{\partial x_1^{\lambda_1}\cdots\partial t^{\lambda_i}\cdots\partial x_n^{\lambda_n}}\big(\varpi_i^n(b_kt)+\hat{\varpi}_i^n(x)\big)
\end{aligned}$$

Οπότε περιοριζόμενοι στα συμπαγή $K\subset\mathbb{R}^n_{i,+}$ με το t να είναι σε συμπαγή περιοχή του μηδενός:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_k b_k^{2\lambda_i}\varphi(b_kt)\frac{\partial^{|\lambda|}f}{\partial x_1^{\lambda_1}\cdots\partial t^{\lambda_i}\cdots\partial x_n^{\lambda_n}}\big(\varpi_i^n(b_kt)+\hat{\varpi}_i^n(x)\big)\right|\leqslant\\
&\leqslant\left\|\frac{\partial^{|\lambda|}f}{\partial x_1^{\lambda_1}\cdots\partial t^{\lambda_i}\cdots\partial x_n^{\lambda_n}}\right\|_{\infty}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\cdot|b_k|^{2\lambda_i}\overset{\star}{<}\infty
\end{aligned}$$

Η ανισότητα άστρο ($\star$) ισχύει από την ιδιότητα **ii.** του **Λήμματος 2.3**. Αυτό δείχνει ότι, καθώς $t\to0^-$, τα όρια των παραγώγων (κάθε τάξης) υπάρχουν. Παίρνοντας λοιπόν όρια καθώς $t\to0^-$, εάν συμβολίσουμε:

$$\frac{\partial^{|\lambda|}f}{\partial x_1^{\lambda_1}\cdots\partial t^{\lambda_i}\cdots\partial x_n^{\lambda_n}}\big(\varpi_i^n(0+)+\hat{\varpi}_i^n(x)\big)=\lim_{t\to0^+}\frac{\partial^{|\lambda|}f}{\partial x_1^{\lambda_1}\cdots\partial t^{\lambda_i}\cdots\partial x_n^{\lambda_n}}\big(\varpi_i^n(t)+\hat{\varpi}_i^n(x)\big)$$

θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to0^-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k^{2\lambda_i}\varphi(b_kt)\frac{\partial^{|\lambda|}f}{\partial x_1^{\lambda_1}\cdots\partial t^{\lambda_i}\cdots\partial x_n^{\lambda_n}}\big(\varpi_i^n(b_kt)+\hat{\varpi}_i^n(x)\big)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k^{2\lambda_i}\frac{\partial^{|\lambda|}f}{\partial x_1^{\lambda_1}\cdots\partial t^{\lambda_i}\cdots\partial x_n^{\lambda_n}}\big(\varpi_i^n(0+)+\hat{\varpi}_i^n(x)\big)\\
&=\frac{\partial^{|\lambda|}f}{\partial x_1^{\lambda_1}\cdots\partial t^{\lambda_i}\cdots\partial x_n^{\lambda_n}}\big(\varpi_i^n(0+)+\hat{\varpi}_i^n(x)\big)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}a_k b_k^{2\lambda_i}\\
&\overset{\star}{=}\frac{\partial^{|\lambda|}f}{\partial x_1^{\lambda_1}\cdots\partial t^{\lambda_i}\cdots\partial x_n^{\lambda_n}}\big(\varpi_i^n(0+)+\hat{\varpi}_i^n(x)\big)
\end{aligned}$$

με την ισότητα άστρο ($\star$) να δικαιολογείται από την ιδιότητα **iii.** του **Λήμματος 2.3**. Οπότε αριστερά του μηδενός τα όρια συμφωνούν με αυτά δεξιά του μηδενός.

Για το ii.: Η γραμμικότητα είναι σχετικά άμεση, οπότε παραλείπεται η απόδειξή της. Θεωρούμε συναρτήσεις $f_j\in C^\infty(\mathbb{R}^n_{i,+};\mathbb{R})$ (των οποίων τα όρια των παραγώγων καθώς $t\to0^-$ υπάρχουν) τέτοιες ώστε $\varrho(f_j,f)\to0$ για κάποια $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n_{i,+};\mathbb{R})$. Από την **Πρόταση 2.4**, $\partial^\ell(f_j-f)\to0$ ομοιόμορφα, για τα διάφορα συμπαγή $K\subset\mathbb{R}^n_{i,+}$.

Παρατηρούμε τώρα ότι, αν $\tilde{f}_j$, $\tilde{f}$ είναι οι αντίστοιχες επεκτάσεις των f_j,f:

$$\sup_{K^*}\left|\frac{\partial^{|\lambda|}(\tilde{f}_j-\tilde{f})}{\partial x_1^{\lambda_1}\cdots\partial t^{\lambda_i}\cdots\partial x_n^{\lambda_n}}\right|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\cdot|b_k|^{2\lambda_i}\sup_K\left|\frac{\partial^{|\lambda|}(f_j-f)}{\partial x_1^{\lambda_1}\cdots\partial t^{\lambda_i}\cdots\partial x_n^{\lambda_n}}\right|$$

Το σύνολο K^* είναι συμπαγές στο $\overline{\mathbb{R}^n_{i,-}}$ και το K είναι συμπαγές σύνολο στο $\overline{\mathbb{R}^n_{i,+}}$ που περιέχει τις «ανακλάσεις» του K μέσω των $t\mapsto b_kt$. Γράφουμε επιπλέον:

$$\begin{aligned}
\sup_{K^*}\left|\frac{\partial^{|\lambda|}(\tilde{f}_j-\tilde{f})}{\partial x_1^{\lambda_1}\cdots\partial t^{\lambda_i}\cdots\partial x_n^{\lambda_n}}\right|&\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\cdot|b_k|^{2\lambda_i}\sup_K\left|\frac{\partial^{|\lambda|}(f_j-f)}{\partial x_1^{\lambda_1}\cdots\partial t^{\lambda_i}\cdots\partial x_n^{\lambda_n}}\right|\\
&\overset{\star}{=}\sup_K\left|\frac{\partial^{|\lambda|}(f_j-f)}{\partial x_1^{\lambda_1}\cdots\partial t^{\lambda_i}\cdots\partial x_n^{\lambda_n}}\right|
\end{aligned}$$

(στην άστρο ($\star$) ξαναχρησιμοποιείται το **Λήμμα 2.3, iii.**). Δηλαδή $\sup_{K^*}|\partial^\lambda(\tilde{f}_j - \tilde{f})| \leqslant \sup_K |\partial^\lambda(f_j - f)|$. Χρησιμοποιώντας το ότι $\partial^\ell(f_j - f) \to 0$ ομοιόμορφα, παίρνουμε τελικά ότι $\partial^\ell(\tilde{f}_j - \tilde{f}) \to 0$ ομοιόμορφα. Από την **Πρόταση 2.4**, $\tilde{f}_j \to \tilde{f}$ στο $\mathbb{R}^n_{i,-}$.

Μέχρι τώρα ας συνοψίσουμε να δούμε τι ακριβώς έχουμε βρει. Καταρχάς εξ υποθέσεως $\tilde{f}_j = f_j \to f = \tilde{f}$ στο $\mathbb{R}^n_{i,+}$, κι επιπλέον δείξαμε ότι $\tilde{f}_j \to \tilde{f}$ στο $\mathbb{R}^n_{i,-}$.

Στον $i-$άξονα τα όρια των f_j υπάρχουν και οπουδήποτε αλλού στο $\mathbb{R}^n_{i,+}$, $f_j \to f$. Οπότε, λόγω αυτής της ύπαρξης η σύγκλιση $\tilde{f}_j \to \tilde{f}$ μεταφέρεται και στον $i-$άξονα. Δηλαδή $\tilde{f}_j \to \tilde{f}$ στο $\mathbb{R}^n$.

Δείξαμε ότι αν $f_j \to f$, τότε $Ef_j = \tilde{f}_j \to \tilde{f} = Ef$, οπότε ο τελεστής E είναι συνεχής.

□

Βιβλιογραφία

[1] James Munkres: ***Analysis on Manifolds*** (Addison-Wesley Publishing Company, 1991)

[2] [10] R.T.Seeley: ***Extension of C^∞ functions defined in a half space*** (American Mathematical Society, 1963)

[3] Pekka Pankka: ***Introduction to de Rham cohomology*** (University of Jyväskylä, Dept. of Mathematics and Statistics, 2013)

[4] [10] Γιαλελής Νίκος, Μπιτσούνη Βασιλική: ***Γεωμετρική Ανάλυση*** (Σημειώσεις Π.Π.Σ., ΕΚΠΑ, 2021)

[5] Χατζηαφράτης Τηλέμαχος: ***Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*** (Συμμετρία, 2009)