# Η άλγεβρα και η ομάδα του Heisenberg

Αναστάσιος Φράγκος

Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακο Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τελευταία ενημέρωση: 18/05/2024

# Πίνακας Περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

# Εισαγωγή και προαπαιτούμενα

## 1.1 Αξιωματική κβαντομηχανική

### 1.1.1 Τα αξιώματα της κβαντομηχανικής

Στην κλασική μηχανική τα υλικά σώματα (ας υποθέσουμε σταθερής μάζας) και οι αλληλεπιδράσεις τους με το περιβάλλον καθορίζονται από της «αρχικές συνθήκες» θέσης, κι ενδεχομένως ταχύτητας κι επιτάχυνσης, δηλαδή από ένα διάνυσμα $v \in (\mathbb{R}^3)^3$ που εμπεριέχει αυτές τις τρεις «πληροφορίες».

Παράδειγμα αποτελεί η απλή αρμονική ταλάντωση, που περιγράφεται από το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned} &m \cdot \ddot{x} = -kx \\ &x(0) = x_0 \\ &\dot{x}(0) = u_0 \end{aligned}$$

(όπου $k$ είναι η σταθερά της ταλάντωσης) και η ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση:

$$\begin{aligned} &\ddot{x} = \ddot{x}(0) = a \\ &x(0) = x_0 \\ &\dot{x}(0) = u_0 \end{aligned}$$

μεταξύ πολλών άλλων.

Στην κβαντική φυσική η φύση των στοιχειωδών σωματιδίων είναι πολύ πιο περίπλοκη απ' ότι απλώς ένα σημείο στον χώρο. Είναι γνωστή η διττή φύση των στοιχειωδών σωματιδίων (κυματοσωματιδιακός δυϊσμός), κατά την οποία όλα τα φυσικά σωματίδια έχουν και κυματική φύση, η οποία υπό προϋποθέσεις και μέσω αλληλεπίδρασης, «καταρρέει» σε κάτι που θυμίζει περισσότερο υλικό σωματίδιο με την κλασική έννοια.[1] Η κατάσταση λοιπόν ενός σωματιδίου δεν μπορεί να περιγραφεί από σημεία όπως στην κλασική περίπτωση, και γι' αυτό καταλήγουμε σε κατανομές (με την πιθανοτική έννοια), δηλαδή με συναρτήσεις $\Psi$ ώστε.

$$\int_{\mathbb{R}^3} \overline{\Psi(x)} \cdot \Psi(x)\, dx = 1$$

[1] Χαρακτηριστικό αυτής της κυματικής φύσης είναι το φαινόμενο της συμβολής και των κλασικών τροχιών που ακολουθούν τα σωματίδια, μέσω του πειράματος των δύο σχισμών.

και υπό αυτήν τη σύμβαση, η πιθανότητα το σωματίδιο (με την κλασική έννοια) να βρεθεί σε διάστημα $(a, b)$ γίνεται:

$$\mathbb{P}(a,b) = \int_a^b |\Psi(x)|^2 \, dx$$

Προϋπόθεση για να ορίζονται όλα τα παραπάνω είναι η συνθήκη $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Θα αρκούσε ενδεχομένως κι άλλη ασθενέστερη υπόθεση, αλλά αυτό απαγορεύεται από τα αξιώματα της κβαντομηχανικής, τα οποία θα βλέπουμε με τη σειρά παρακάτω.

**Αξίωμα των καταστάσεων:** *Οι καταστάσεις ενός κβαντομηχανικού συστήματος δίνονται από τα μη-μηδενικά στοιχεία ενός μιγαδικού χώρου Hilbert* $\big(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot)\big)$, *με* $(\Psi, \Psi) = 1$, *τα οποία ονομάζονται κυματοσυναρτήσεις.*

Δεδομένων των καταστάσεων, $\Psi \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^3) = L^2(\mathbb{R}^3)$, τα μεγέθη βρίσκονται μελετώντας τις καταστάσεις (που είναι συναρτήσεις), και κατά συνέπεια είναι λογικό κανείς να τα φαντάζεται ως τελεστές που δρουν στις συναρτήσεις. Χαρακτηριστικός για την κβαντική φυσική είναι ο τελεστής της ορμής:

$$P\Diamond = -i\hbar \cdot \nabla \Diamond$$

καθώς και ο τελεστής της θέσης:

$$Q\Diamond = x \cdot \Diamond, \text{ όπου } x = (x_1, x_2, x_3)$$

Γενικά τα μεγέθη πρέπει να μετρώνται με τρόπο τέτοιο ώστε να επιστρέφουν πραγματικές μέσες τιμές και διασπορές, οπότε είναι σκόπιμο να τεθεί ως απαίτηση η αυτοσυζυγία του τελεστή. Δηλαδή, δεδομένης μίας μέτρισης $A$, οι:

$$\mathbb{E}(A) = (\Psi, A\Psi) = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\Psi(x)} A\Psi(x) \, dx \text{ και } \mathbb{V}(A) = \sqrt{\mathbb{E}\big((A - \mathbb{E}(A))^2\big)}$$

πρέπει να είναι πραγματικοί αριθμοί.

**Αξίωμα των μετρήσεων:** *Οι μετρήσεις ενός κβαντομηχανικού συστήματος υλοποιούνται μέσω αυτοσυζυγών τελεστών του* $\mathcal{H}$.

Το τελευταίο αξίωμα που θα δούμε σχετίζεται με τη χρονική εξέλιξη των κυματοσυναρτήσεων (δηλαδή με την εξίσωση του Schrödinger), και χρειάζεται μία μικρή προετοιμασία. Ας σημειώσουμε για αρχή ότι η επόμενη ανάλυση θα γίνει για ένα ελεύθερο σωματίδιο σε μία διάσταση, δηλαδή ένα σωματίδιο που κινείται σε κενό χώρο, χωρίς ύπαρξη οποιασδήποτε φύσεως δυναμικού.

Δεδομένου ότι θέλουμε να μελετήσουμε την χρονική εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης, είναι σκόπιμο να εκφράσουμε και την συσχέτιση με τον χρόνο $\Psi_t$, ή όπως γίνεται συνήθως, να γράψουμε $\Psi_t(x) = \Psi(x;t)$. Γνωρίζουμε τώρα ότι ένα μονοδιάστατο περιοδικό κύμα (λύση της $u_{tt} = c^2 u_{xx}$) έχει εξίσωση:

$$Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)}$$

όπου $k = 2\pi/\lambda$ ($\lambda$ είναι το μήκος κύματος), $\omega = 2\pi/T$ ($T$ είναι η περίοδος ταλάντωσης) και τα $A, B$ εξατώνται από τα $k, \omega$. Βέβαια, αν κανείς μελετά σωματίδια (όπως στη δική μας περίπτωση), η ταχύτητα διάδοσης είναι -υπό ιδανικές συνθήκες- η ταχύτητα του φωτός, και κατά συνέπεια $\lambda = cT \Rightarrow 1/T = c/\lambda \Rightarrow \omega = ck$, πράγμα που σημαίνει ότι τα $A, B$ στην πραγματικότητα εξαρτώνται μόνο από το $k$.

Για ένα ελεύθερο σωματίδιο έχουμε λοιπόν:

$$\Psi(x;t) = A(k)e^{i(kx-\omega t)} + B(k)e^{-i(kx+\omega t)}$$

Φυσιολογικά κανείς εδώ ίσως σταματούσε, η κατάσταση όμως στη φυσική δεν είναι τόσο απλή. Πειραματικά φαίνεται ότι η κυματοσυνάρτηση περιέχει ένα συνεχές φάσμα ενεργειών, και κατά συνέπεια αποτελεί υπέρθεση κυματοσυναρτήσεων της προηγούμενης μορφής, για τα διάφορα $k$. Θυμηθείτε εν τω μεταξύ τη σχέση του Plank:

$$E = \hbar\omega = 2\pi\hbar c \cdot k \text{ (δηλαδή } E \propto k)$$

όπου $E$ είναι η ενέργεια. Είναι λοιπόν πιο λογικό να γράφουμε:

$$\Psi(x;t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)}\,dk$$

θεωρώντας την υπέρθεση των $\Psi$ ως προς όλα τα δυνατά $k$. Μαλιστά, από τη σχέση του Plank $E = \hbar\omega$ και του de Broglie $p = \hbar k$ (όπου $p$ είναι η ορμή), έχουμε:

$$\Psi(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{A}(p)e^{i(px-Et)/\hbar} + \widetilde{B}(p)e^{-i(px+Et)/\hbar}\,dp$$

Απαιτώντας αρκετή ομαλότητα και παραγωγίζοντας ως προς $t$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{A}(p)\frac{\partial}{\partial t}e^{i(px-Et)/\hbar} + \widetilde{B}(p)\frac{\partial}{\partial t}e^{-i(px+Et)/\hbar}\,dp \\ &= -\frac{i/\hbar}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{A}(p)E(p)e^{i(px-Et)/\hbar} + \widetilde{B}(p)E(p)e^{-i(px+Et)/\hbar}\,dp\end{aligned}$$

κι αντίστοιχα, παραγωγίζοντας δύο φορές ως προς $x$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{A}(p)\frac{\partial}{\partial x}e^{i(px-Et)/\hbar} + \widetilde{B}(p)\frac{\partial}{\partial x}e^{-i(px+Et)/\hbar}\,dp \\ &= \frac{i/\hbar}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{A}(p)pe^{i(px-Et)/\hbar} - \widetilde{B}(p)pe^{-i(px+Et)/\hbar}\,dp\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} &= \frac{i/\hbar}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{A}(p)p\frac{\partial}{\partial x}e^{i(px-Et)/\hbar} - \widetilde{B}(p)p\frac{\partial}{\partial x}e^{-i(px+Et)/\hbar}\,dp \\ &= \frac{(i/\hbar)^2}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{A}(p)p^2e^{i(px-Et)/\hbar} + \widetilde{B}(p)p^2e^{-i(px+Et)/\hbar}\,dp\end{aligned}$$

Δηλαδή, εάν -από την κλασική φυσική- η ενέργεια είναι $E = p^2/(2m)$ (η κινητική ενέργεια), συνδυάζοντας τα δύο προηγούμενα παίρνουμε την εξίσωση του Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

Στην περίπτωση ≪άνευ≫ υπέρθεσης, κανείς μπορεί να παρατηρήσει και πάλι τη σχέση:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

και μάλιστα:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{p^2}{2m}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

το οποίο δίνει έναυσμα να οριστεί, στην περίπτωση της υπέρθεσης, η Hamilton-ιανή $H$ (ο τελεστής της ενέργειας) και ο τελεστής της ορμής $P$ ώστε:

$$H = \frac{P^2}{2m} = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

(δηλαδή $P = \pm i\hbar \cdot \partial/\partial x$). Η εξίσωση του Schrödinger παίρνει τότε τη μορφή:

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Το σημαντικό σχόλιο σε αυτήν την περίπτωση είναι ότι η τελευταία μορφή της εξίσωσης είναι η πιο γενικευμένη. Για παράδειγμα, με παρόμοιους υπολογισμούς είναι απλό κανείς να δει ότι, για την περίπτωση ενός σωματιδίου σε δυναμικό $V$, εξάγεται:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V \cdot \Psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V\right]\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

δηλαδή:

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \text{ όπου } H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V$$

(Η Hamilton-ιανή είναι άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας). Επίσης, σε περισσότερες διαστάσεις έχουμε:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x \Psi + V \cdot \Psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x + V\right]\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

δηλαδή:

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \text{ όπου } H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x + V$$

με το $\Delta_x = \nabla_x^2$ να είναι ο τελεστής Laplace στις χωρικές μεταβλητές. Η «γενικευμένη» μορφή του τελεστή της ορμής είναι $P = \pm i\hbar \cdot \nabla$, με επιλεγμένο το πρόσημο μείον.

**Αξίωμα της χρονικής εξέλιξης:** *Ο τελεστής της Hamilton-ιανής $H$, που εκφράζει την ενέργεια, υπακούει στη διαφορική εξίσωση:*

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

*Ο τελεστής της ορμής τότε γίνεται $P = -i\hbar \cdot \nabla$.*

Θα παρατηρήσατε ότι δεν αναφερθήκαμε στον ορισμό του τελεστή της θέσης, κι αυτό γιατί είναι απολύτως φυσιολογικός και αναμενόμενος, σε αντίθεση με αυτόν της ορμής.

### 1.1.2 Οι οπτικές των Schrödinger και Heisenberg για τη κβαντομηχανική

Ως τώρα έχουμε δει τη χρονική εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης, και γενικά της μετρήσεις τις θεωρούσαμε «σταθερές». Δηλαδή η κυματοσυνάρτηση μπορεί μεν να μεταβάλλεται στον χρόνο, οι τελεστές των μετρήσεων όμως είναι ανεξάρτητοι αυτού. Η οπτική αυτή της κβαντομηχανικής είναι η λεγόμενη «οπτική του Schrödinger».

Υπάρχει και μία άλλη οπτική, η «οπτική του Heisenberg», κατά την οποία οι κυματοσυναρτήσεις είναι σταθερές και οι μετρήσεις μεταβάλλονται. Για παράδειγμα, από τη σχέση που έχουμε βρει:

$$\Psi(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{A}(p) e^{i(px-Et)/\hbar} + \widetilde{B}(p) e^{-i(px+Et)/\hbar}\, dp$$

μπορούμε να καταλήξουμε στον τύπο:

$$\Psi(x;t) = e^{-itE/\hbar}\Psi(x;0)$$

το οποίο είναι μία ένδειξη ότι όλες οι μετρήσεις εξαρτώνται, στην ουσία, από την «αρχική κατάσταση» και τον χρόνο που πέρασε (κι όχι από την κατάσταση μετά από κάποιον χρόνο).

**Ορισμός 1.1.** *Με $A_S$ θα συμβολίζουμε μία μέτρηση με την οπτική του Schrödinger, ενώ με $A_H$ μία μέτρηση με την οπτική του Heisenberg. Ορίζουμε επίσης, για κάθε μέτρηση $A_S$:*

$$A_H = U(t)^* A_S U(t), \text{ όπου } U(t) = e^{-itH_S/\hbar}$$

*και κατορθώνουμε με αυτό να εξασφαλήσουμε τις σημαντικές σχέσεις:*

$$\mathbb{E}(A_S) = \mathbb{E}(A_H) \text{ και } \mathbb{V}(A_S) = \mathbb{V}(A_H)$$

Ιδίως για την περίπτωση της Hamilton-ιανής, δεν έχει νόημα η διάκριση $H_H$, $H_S$, καθώς η $H_S$ μετατίθεται με τους $U$. Θα παραλείπουμε λοιπόν τους δείκτες και θα γράφουμε μονάχα $H$. Με τον παραπάνω ορισμό τώρα παίρνουμε το ακόλουθο:

**Παρατήρηση 1.1** (Εξίσωση κίνησης του Heisenberg)**.** *Εάν με $[\cdot,\cdot]$ συμβολίσουμε τον μεταθέτη $[A,B] = AB - BA$, έχουμε για κάθε μέτρηση $A$:*

$$\frac{dA_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A_H, H] + \left(\frac{\partial}{\partial t} \circ A_S\right)_H$$

*Απόδειξη:* Είναι αποτέλεσμα πράξεων.

$$\begin{aligned}
\frac{dA_H}{dt} &= \frac{\partial U^*}{\partial t} A_S U + U^* A_S \frac{\partial U}{\partial t} + U^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \circ A_S\right) U \\
&= \frac{i}{\hbar} H U^* A_S U - \frac{i}{\hbar} U A_S U H + \left(\frac{\partial}{\partial t} \circ A_S\right)_H \\
&= -\frac{1}{i\hbar} H U^* A_S U + \frac{1}{i\hbar} U^* A_S U H + \left(\frac{\partial}{\partial t} \circ A_S\right)_H \\
&= -\frac{1}{i\hbar} H A_H + \frac{1}{i\hbar} A_H H + \left(\frac{\partial}{\partial t} \circ A_S\right)_H \\
&= \frac{1}{i\hbar}[A_H, H] + \left(\frac{\partial}{\partial t} \circ A_S\right)_H
\end{aligned}$$

□

Βιβλιογραφικά αναφέρουμε ότι ο Dirac στο βιβλίο του [11] είχε παρατηρήσει αυτή τη σχέση, και είχε την ιδέα να την μεταφράσει με όρους μηχανικής, και συγκεκριμένα αντικαθιστώντας τον μεταθέτη $[\cdot,\cdot]$ με την αγκύλη Poisson $\{\cdot,\cdot\}$:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}$$

(όπου $x_i$ είναι οι συντεταγμένες της θέσης και $p_i$ της ορμής). Η αντικατάσταση αυτή $F_{\{f,g\}} = 1/(i\hbar) \cdot [F_f, F_g]$ θα έπρεπε να υπακούει σε ορισμένους κανόνες, συγκεκριμένα $F_1 = \mathrm{Id}$, $F_x = Q$, $F_p = P$ και να είναι γραμμικός στα $x, p$. Προς κακή τύχη, τέτοια αντικατάσταση δεν υπάρχει,[2] παρόλα αυτά κανείς είναι δυνατόν να εργαστεί με έναν

[2]Αυτό το αποτέλεσμα λέγεται Θεώρημα των Groenewold-van Hove. Λεπτομέρειες στο [21].

«ασυμπτωτικό» τρόπο: Θεωρώντας το $\hbar$ παράμετρο, καθώς $0 < \hbar \approx 0$ έχει νόημα η αλλαγή:

$$\frac{1}{i\hbar}[A, B] \rightsquigarrow \{A, B\}$$

Ασυμπτωτικά λοιπόν και κατά πολύ ευρεία έννοια, η κβαντομηχανική παίρνει μορφή κλασικής μηχανικής. Η οπτική του Heisenberg λοιπόν είναι δυνατόν να δώσει μία αδρή σύνδεση της κβαντομηχανικής με την κλασική μηχανική, κάτι στο οποίο η οπτική του Schrödinger αποτυγχάνει.

Ένας φυσικός θα αναρωτηθεί, πολύ εύλογα, ποια από τις δύο οπτικές εκφράζει καλύτερα τη φυσική πραγματικότητα. Από τη μία αυτή του Schrödinger έρχεται με πιο φυσικό τρόπο, από την άλλη του Heisenberg είναι πιο κοντά στην κλασική φυσική. Μαθηματικά θα δείξουμε, μέσω της ομάδας του Heisenberg, ότι όχι απλώς ότι αμφότερες είναι χρήσιμες, αλλά και ότι στην πραγματικότητα είναι κατά κάποιον τρόπο ισοδύναμες. Γι' αυτό θα χρειαστούμε, μεταξύ άλλων, τη θεωρία αναπαραστάσεων.

## 1.2 Βασική θεωρία αναπαραστάσεων και γεωμετρία

Εν γένει, δεδομένης μίας ομάδας, είναι ευκολότερο να μελετούνται γραμμικά αντικείμενα παρά η συγκεκριμένη δομή της ομάδας. Έτσι λοιπόν, ένα σύνηθες τέχνασμα στα μαθηματικά και τη φυσική είναι χρήση των αναπαραστάσεων, δηλαδή των απεικονίσεων $\rho : (G, \cdot) \to (\mathrm{GL}(V), \circ)$ που είναι μορφισμοί ομάδων. Με $G$ συμβολίζουμε την υπό μελέτη ομάδα (με πολλαπλασιαστικό συμβολισμό), με $V$ έναν διανυσματικό χώρο (για την περίπτωσή μας $\mathbb{K}-$διανυσματικό χώρο με $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) κι επίσης ορίζουμε:

$$\mathrm{GL}(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ είναι } \mathbb{K} - \text{γραμμική και αμφιμονοσήμαντη}\}$$

**Ορισμός 1.2** (Αναπαραστάσεις ομάδων). *Έστω $(G, \cdot)$ μία πολλαπλασιαστική ομάδα και $V$ ένας διανυσματικός χώρος. Μία απεικόνιση $\rho : (G, \cdot) \to (\mathrm{GL}(V), \circ)$ θα καλείται αναπαράσταση εάν είναι μορφισμός ομάδων.*

Για διάφορες εφαρμογές, συνήθως ο χώρος $V$ είναι πεπερασμένης διάστασης και η ομάδα $G$ δεν είναι απλώς μία ομάδα, αλλά έχει δομή (τουλάχιστον) τοπολογικής πολλαπλότητας. Αυτό μας επιτρέπει να μεταχειριζόμαστε με γεωμετρικό τρόπο τη $G$, ενώ ταυτόχρονα διάφορα επιχειρήματα συμμετρίας (λόγω της δομής της ομάδας) είναι εξαιρετικά βοηθητικά στην περιγραφή των μαθηματικών αλλά και της φυσικής. Εμείς θα ασχοληθούμε κυρίως με απειροδιάστατες αναπαραστάσεις, παρόλα αυτά η δομή των πεπερασμένης διάστασης αναπαραστάσεων είναι σίγουρα χρήσιμη για την κατανόηση του εν λόγω μαθηματικού αντικειμένου.

Στην περίπτωση όπου ο $V$ έχει πεπερασμένη διάσταση, λέμε ότι η αναπαράσταση έχει πεπερασμένη διάσταση. Μάλιστα σε αυτήν την περίπτωση η $\mathrm{GL}(V)$ μπορεί να ταυτιστεί με την ομάδα πινάκων:

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n,n} \mid \det A \neq 0\}$$

όπου $n$ είναι η διάσταση της αναπαράστασης.

**Ορισμός 1.3** (Αναλλοίωτοι υπόχωροι και ανάγωγες αναπαραστάσεις)**.** *Έστω* $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *μία αναπαράσταση. Ένας υπόχωρος* $W \subseteq V$ *θα λέγεται* $\rho-$*αναλλοίωτος εάν για κάθε* $g \in G$ *έχουμε* $\rho(g)W \subseteq W$. *Επίσης, η* $\rho$ *θα καλείται ανάγωγη εάν οι μόνοι* $\rho-$*αναλλοίωτοι υπόχωροι είναι οι* $\{0\}$ *και* $V$.

Θα ορίσουμε ακόμα την έννοια της ισοδυναμίας των αναπαραστάσεων, κατά την οποία υπάρχει μία γραμμική απεικόνιση που μας μεταφέρει από τη μία στην άλλη.

**Ορισμός 1.4** (Συνδέσεις και ισοδύναμες αναπαραστάσεις)**.** *Έστω* $\rho_1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$, $\rho_2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ *δύο αναπαραστάσεις της* $G$. *Μία σύνδεση των αναπαραστάσεων (intertwiner) είναι μία γραμμική απεικόνιση* $T : V_1 \to V_2$ *με την ιδιότητα:*

$$\text{Για κάθε } g \in G,\ \rho_2(g) \circ T = T \circ \rho_1(g)$$

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\
V_1 \arrow[r, "T"'] & V_2
\end{tikzcd}$$

*Στην περίπτωση που υπάρχει* $T$ *αμφιμονοσήμαντη σύνδεση, θα λέμε ότι οι* $\rho_1$ *και* $\rho_2$ *είναι ισοδύναμες.*

Επιστρέφοντας στην επιπρόσθετη γεωμετρική δομή, ορίζουμε τις ομάδες και τις άλγεβρες Lie.

**Ορισμός 1.5** (Ομάδες Lie)**.** *Μία τοπολογική ομάδα* $(G, \cdot)$ *(δηλαδή μία ομάδα που έχει δομή τουλάχιστον τοπολογικής πολλαπλότητας) θα λέγεται ομάδα Lie εάν ο πολλαπλασιασμός* $(g, h) \mapsto g \cdot h$ *και η αντιστροφή* $g \mapsto g^{-1}$ *είναι συνεχείς. Ένας άλλος ορισμός, περισσότερο βοηθητικός, απαιτεί η* $G$ *να είναι διαφορίσιμη ή* $C^\infty-$*πολλαπλότητα, και οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και τις αντιστροφής διαφορίσιμες ή* $C^\infty$.

Παρά το ότι τα αντικείμενα της κβαντομηχανικής φαίνεται να μην διαθέτουν ομαλότητα (οι κυματοσυναρτήσεις, για παράδειγμα, είναι $L^2$), εμάς θα μας απασχολήσουν σε μεγάλο βαθμό έννοιες διαφορισιμότητας. Κατά συνέπεια, στις ομάδες Lie θα μας ενδιαφέρει και η έννοια της παραγώγου. Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε πώς κανείς μπορεί να μελετήσει την $L^2-$παράγωγο μέσω των κατανομών.

**Ορισμός 1.6** (Άλγεβρες Lie)**.** *Έστω $\mathfrak{g}$ ένας $\mathbb{K}-$διανυσματικός χώρος και $[\cdot,\cdot]:\mathfrak{g}^2\to\mathfrak{g}$. Θα λέμε ότι η δομή $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ είναι μία άλγεβρα Lie εάν:*

*i. Η $[\cdot,\cdot]$ είναι διγραμμική.*

*ii. Η $[\cdot,\cdot]$ είναι αντισυμμετρική, δηλαδή $[\xi,\eta]=-[\eta,\xi]$.*

*iii. Ισχύει η ταυτότητα του Jacobi $[\xi,[\eta,\theta]]-[\eta,[\xi,\theta]]+[\theta,[\xi,\eta]]=0$.*

Δεδομένης της γραμμικότητας των αλγεβρών Lie, αναμένεται η έννοια της αναπαράστασης σε αυτήν την περίπτωση να είναι φυσική και όχι περίπλοκη.

**Ορισμός 1.7** (Αναπαραστάσεις Αλγεβρών Lie)**.** *Έστω $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ μία άλγεβρα Lie και $V$ ένας διανυσματικός χώρος. Μία γραμμική απεικόνιση $R:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ , όπου $\mathfrak{gl}(V)$ είναι η άλγεβρα όλων των $V-$γραμμικών απεικονίσεων, θα καλείται αναπαράσταση της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$ εάν είναι μορφισμός αλγεβρών Lie. Δηλαδή, εάν διατηρεί την αγκύλη Lie.*

$$[R(X),R(Y)]=R([X,Y])$$

Στην πράξη, θα βλέπουμε τις άλγεβρες Lie ως εφαπτόμενους χώρους των ομάδων Lie. Δοθείσης μίας διαφορίσιμης πολλαπλότητας $G$, πόσο μάλλον μίας ομάδας Lie, κανείς μπορεί να ορίσει τον εφαπτόμενο χώρο της στο $g$:

$$T_gG=\Big\{(g,v)\;\Big|\;\exists\gamma\in C\big((-\varepsilon,\varepsilon),\mathbb{R}^m\big)\text{ με }\gamma(0)=g\text{ και }\gamma'(0)=v\Big\}$$

όπου $m$ είναι η διάσταση της $G$ ως πολλαπλότητα. Αυτός είναι ο φυσιολογικός γεωμετρικός ορισμός του εφαπτόμενου χώρου, που συμφωνεί με τη διαίσθηση και τους αντίστοιχους ορισμούς στις επιφάνειες

Ένας ισοδύναμος τρόπος με τον οποίον οι εφαπτόμενοι χώροι μπορούν να χαρακτηριστούν είναι μέσω των κατά κατεύθυνση παραγώγων στην πολλαπλότητα $G$, δηλαδή μέσω των λεγόμενων παραγωγίσεων. Με αυτήν την οπτική:

$$T_gG=\{v_g\mid v_g\text{ κατά κατεύθυνση παράγωγος στο }g\}$$

(κατά κάποιον τρόπο, ταυτίζουμε τις κατά κατεύθυνση παραγώγους με την κατεύθυνση). Προσέξτε ότι, εσκεμμένα, δεν αναφέρουμε το είδος της διαφορισιμότητας, κι αυτό γιατί στο δικό μας πλαίσιο η διαφορισιμότητα δεν είναι η συνηθισμένη, αλλά κάπως «ασθενής». Αυτά είναι γεωμετρικά ζητήματα για τα οποία μπορείτε να βρείτε λεπτομέρειες στο [8].

Ειδικά στις ομάδες Lie δεν έχει νόημα η διαφοροποίηση των εφαπτόμενων χώρων όσον αφορά το σημείο επαφής τους $g$. Ισχύει δηλαδή $T_eg\cong T_gG$ για κάθε $g\in G$, όπου $e$ είναι το μοναδιαίο στοιχείο της $G$. Δεν θα έπρεπε αυτό να μας παραξενεύει, αφού η ομάδα έχει τη δομή της «μεταφοράς», μέσω της πράξης της ομάδας, κι οπότε κάθε $T_gG$ μπορεί να «μεταφερθεί» στο $T_eG$. Αυτό κανείς μπορεί να το δει με περισσότερη λεπτομέρεια, δείχνοντας ότι κάθε εφαπτόμενος χώρος $T_gG$ ταυτίζεται με τα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία $\mathscr{X}_L(G)$, δηλαδή τα διανυσματικά πεδία $\xi$ για τα οποία:

$$(L_g)_*\big(\xi(h)\big)=\xi(g\cdot h)$$

όπου $L_g(h) = g \cdot h$. Ο τελεστής της προώθησης $(\cdot)_*$ ορίζεται μέσω του $F_*(v)(\lozenge) = v(\lozenge \circ F)$ και χρησιμεύει για να μεταφέρει κατευθυνόμενες παραγώγους από έναν εφαπατόμενο. χώρο σε έναν άλλο. Η διαίσθηση για τα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία είναι η ακόλουθη: Εάν η $G$ είναι κατά μία έννοια ρευστή -δηλαδή υπάρχει ροή υλικού στην «επιφάνειά» της, που υλοποιείται από το διανυσματικό πεδίο $\xi$- τότε η ροή στο σημείο $g \cdot h$ είναι ακριβώς η ροή στο $h$, εάν μεταφερθεί από το $h$ στο $g \cdot h$. Εφόσον λοιπόν ισχύουν οι σχέσεις $(L_g)_*\big(\xi(h)\big) = \xi(g \cdot h)$ για τα διάφορα $g, h \in G$, έχουμε:

$$\xi(g) = (L_g)_*\big(\xi(e)\big)$$

δηλαδή τα εν λόγω διανυσματικά πεδία καθορίζονται μόνο από τις τιμές τους στο $e$, δηλαδή μόνο από τον εφαπτόμενο χώρο $T_eG$. Αυτό δείχνει μέσ' τις άκρες ότι $T_eG \cong \mathscr{X}_L(G) \cong T_gG$. Ένα προσωπικό αγαπημένο βιβλίο που διαπραγματεύεται τέτοιου είδους ζητήματα είναι το [7].

Με αυτά έχουμε δείξει ότι:

**Παρατήρηση 1.2.** *Στις ομάδες Lie $(G, \cdot)$, για κάθε $g \in G$ έχουμε $T_gG \cong T_eG \cong \mathscr{X}_L(G)$.*

Επίσης, θα δείξουμε ότι η $T_eG$ είναι άλγεβρα Lie, πράγμα που θα δικαιολογήσει την ορολογία «η άλγεβρα Lie της ομάδας Lie».

**Παρατήρηση 1.3.** *Έστω μία ομάδα Lie $(G, \cdot)$. Ο εφαπτόμενος χώρος $T_eG$ αποτελεί άλγεβρα Lie, μέσω της συνήθους αγκύλης Lie των (αριστερά αναλλοίωτων) διανυσματικών πεδίων.*

*Απόδειξη:* Οι ιδιότητες της αγκύλης Lie στην $T_eG$ είναι συνέπεια των αντίστοιχων ιδιοτήτων της αγκύλης των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων. Το μόνο που απομένει είναι να δειχθεί ότι η αγκύλη $[\cdot, \cdot]$ διατηρεί τα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία, δηλαδή:

$$[\cdot, \cdot] : \mathscr{X}_L^2(G) \to \mathscr{X}_L(G)$$

Αυτό είναι όμως συνέπεια του ότι τα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία είναι $L_g-$συσχετισμένα, άρα και η αγκύλη Lie.

□

**Ορισμός 1.8** (Η άλγεβρα Lie της ομάδας Lie)**.** *Δοθείσης μίας ομάδας Lie $(G, \cdot)$, η άλγεβρα Lie $T_eG$, με την αγκύλη Lie από τα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία, καλείται η άλγεβρα Lie της $G$.*

Αντιστρόφως, κανείς μπορεί να μεταφερθεί από την άλγεβρα Lie στην ομάδα Lie, με την χρήση της λεγόμενης εκθετικής απεικόνισης. Για να καταλάβουμε σε έναν πρώτο στάδιο την απεικόνιση αυτή, θα ασχοληθούμε με το παράδειγμα του πολλαπλασιαστικού μιγαδικού κύκλου $\mathbb{S}^1$. Ο $\mathbb{S}^1$ είναι ομάδα Lie και η άλγεβρα Lie είναι μία ευθεία με πρόσθεση, δηλαδή ο $\mathbb{R}$. Το ότι ο πολλαπλασιασμός έγινε πρόσθεση είναι συνέπεια της μετάβασης στον εφαπτόμενο χώρο $T_1\mathbb{S}^1 = \{(0, h) \mid h \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$.

Εάν λοιπόν κανείς θέλει να μεταφερθεί από την ευθεία στον κύκλο, θα πρέπει να μετατρέψει την πρόσθεση σε πολλαπλασιασμό, δηλαδή να χρησιμοποιήσει κάποιου είδους εκθετικό. Και πράγματι, η μετάβαση αυτή γίνεται με το σύνηθες μιγαδικό εκθετικό $\theta \mapsto e^{i\theta}$ (ή, εάν θέλουμε να είμαστε εντελώς τυπικοί, $i\theta \mapsto e^{i\theta}$).

Γενικά η εκθετική απεικόνιση ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο. Ένα διανυσματικό πεδίο κανείς μπορεί να το σκέφτεται ως ένα πεδίο ταχυτήτων, παραδείγματος χάρην ενός ρευστού που κινείται επί της πολλαπλότητας $G$. Επομένως υπάρχει μία πολύ στενή σύνδεση μεταξύ των λεγόμενων διαφορικών ροών και των διανυσματικών πεδίων. Οι διαφορικές ροές είναι συναρτήσεις $\Theta(t, g)$, που εξαρτώνται από τον χρόνο $t$ και το σημείο $g$, και δείχνουν πού μεταφέρεται υλικό από το σημείο $g$, μετά από χρόνο $t$. Αυστηρότερα, έχουν τις ιδιότητες:

i. $\Theta(0, g) = g$

ii. $\Theta(t + s, g) = \Theta\big(s, \Theta(t, g)\big)$

(εκ των οποίων η πρώτη είναι φανερή και η δεύτερη δηλώνει ότι δεν έχουν σημασία οι «ενδιάμεσες μετρήσεις», καθώς το να υπολογίσει κανείς πώς μεταφέρεται το υλικό σε χρόνους $t$ κι έπειτα $s$ είναι το ίδιο με τον απλό υπολογισμό μετά από χρόνο $t + s$).

Κοιτώντας την ταχύτητα του υλικού στο $g$, κανείς οδηγείται στον λεγόμενο απειροστικό γεννήτορα:

$$\Theta^\alpha(g)(f) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \big(f\big(\Theta(\Delta t, g)\big) - f(g)\big)$$

που είναι ένα διανυσματικό πεδίο. Για να καταλήξει κανείς σε απειροστικό γεννήτορα $\Theta^\alpha$ που δίνει το διανυσματικό πεδίο $\xi$ (δηλαδή $\Theta^\alpha = \xi$), θα πρέπει προφανώς να επιλέξει κατάλληλα τη διαφορική ροή $\Theta$. Αυτό γίνεται με τον εξής τρόπο: Σταθεροποιούμε ένα σημείο $g$ και κοιτάμε πώς αυτό το $g$ κινείται στον χρόνο. Η κίνησή του θα πρέπει να είναι μία καμπύλη της μορφής $\Theta(\cdot, g)$, όπου $\Theta$ είναι η συνάρτηση που ψάχνουμε, και θα πρέπει να ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση:

$$\xi\big(\Theta(\cdot, g)\big)(f) = \frac{d}{dt}\big(f \circ \Theta(\cdot, g)\big), \text{ για κάθε } f$$

Θυμηθείτε ότι το μόνο που γνωρίζουμε είναι το πεδίο ταχυτήτων, δηλαδή το $\xi$, το οποίο είναι μία συλλογή κατά κατεύθυνσης παραγώγων (αφού είναι διανυσματικό πεδίο). Παίρνοντας τοπικές συντεταγμένες και λύνοντας κατά τα συνήθη την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση, βρίσκουμε την $\Theta$, τουλάχιστον τοπικά. Μάλιστα τοπικά εξασφαλίζεται και η μοναδικότητα της λύσης, από γνωστό θεώρημα των διαφορικών εξισώσεων.

Ιδίως στις ομάδες Lie, η $\Theta$ δεν ορίζεται απλώς τοπικά αλλά ολικά, αφού και πάλι υπάρχει αυτή η έννοια της μεταφοράς. Περισσότερες λεπτομέρειες, που από ανάγκη αποκρύπτονται, μπορούν να βρεθούν στα [7] και [8].

**Ορισμός 1.9** (Η εκθετική απεικόνιση). *Έστω $(G, \cdot)$ μία ομάδα Lie με άλγεβρα Lie $(T_eG, [\cdot, \cdot])$. Ορίζουμε την εκθετική απεικόνιση $\exp : T_eG \to G$ ως εξής:*

$$\exp(v) = \Theta_v(1, e)$$

*όπου $\Theta_v$ είναι η ροή που αντιστοιχεί στο αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο που προέρχεται από το $v$ (με μεταφορές).*

Η ιδέα του ορισμού είναι να καλυφθεί η $G$ από υλικό που προέρχεται από το $e$ κι έχει εκτοξευθεί με ταχύτητα $v$, το οποίο το «σταματάμε» μετά από χρόνο $1$. Φυσικά, αφού ο χρόνος είναι σταθερός, το πόσο «μακρυά» θα γίνει η εκτόξευση εξαρτάται από το πόσο «γρήγορη» είναι η ροή $\Theta_v$, δηλαδή εξαρτάται από το $v$.

Η εκθετική απεικόνιση έχει σημαντικές ομοιότητες με την συνήθη εκθετική, και μία απ' αυτές είναι η ακόλουθη:

**Παρατήρηση 1.4.** *Έστω $(G, \cdot)$ μία ομάδα Lie με άλγεβρα Lie $(T_eG, [\cdot,\cdot])$. Για την εκθετική απεικόνιση έχουμε:*

$$\exp\big((t+s)v\big) = \exp(tv)\cdot\exp(sv)$$

*δηλαδή η πρόσθεση γίνεται πολλαπλασιασμός (τουλάχιστον στην περίπτωση που είμαστε στην ίδια ευθεία, του $v$).*

*Απόδειξη:* Αυτό είναι συνέπεια των ιδιοτήτων της ροής $\Theta_v$ και κατά συνέπεια της «τροχιάς» $\gamma(s) = \Theta_v(st, e)$. Για την $\gamma$ έχουμε $\gamma(0) = e$ και $\gamma'(0) = tv\big(\Theta(st,e)\big)$, οπότε η $\gamma$ είναι τροχιά για τη διαφορική ροή του διανυσματικού πεδίου $tv$. Λόγω της μοναδικότητας των διαφορικών ροών:

$$\exp(tv) = \Theta_v(t,e)$$

Άρα, λόγω του αριστερά αναλλοίωτου:

$$\exp\big((t+s)v\big) = \Theta_v(t+s,e) = \Theta_v\big(s,\Theta_v(t,e)\big) = \Theta_v(s,e)\cdot\Theta_v(t,e) = \exp(sv)\cdot\exp(tv)$$

□

Ειδική περίπτωση αλγεβρών Lie είναι αυτές που είναι ομάδες πινάκων, με αγκύλη Lie τον μεταθέτη $[X,Y] = XY - YX$. Οι ομάδες πινάκων, εκτός από ευκολότερα διαχειρίσιμες, έχουν και μία καλή μορφή για την εκθετική απεικόνιση. Σημειώνουμε ότι, για την τοπολογική εικόνα, οι πίνακες εφοδιάζονται με τη σχετική τοπολογία του $\mathbb{K}^{n^2}$ (δηλαδή κάνουμε τους πίνακες γραμμές).

**Πρόταση 1.1** (Η εκθετική απεικόνιση σε ομάδες πινάκων)**.** *Εάν μία άλγεβρα Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ είναι ομάδα πινάκων και $X \in \mathfrak{g}$, τότε το εκθετικό γίνεται:*

$$\exp(X) = e^X = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}$$

*Απόδειξη:* Έστω $X = (X_{i,j})$. Κανείς μπορεί να δείξει ότι η σειρά $e^{tX} = \sum (tX)^k/k!$ ότι είναι τροχιά που αντιστοιχεί στο αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο με:

$$v = \sum_{i,j} X_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_{i,j}}\Big|_0$$

οπότε τότε $e^{1\cdot X} = \exp(X)$, από τη μοναδικότητα της ροής από την οποία προέρχεται η εκθετική απεικόνιση. Πράγματι, έχουμε:

$$\frac{d}{dt}e^tX = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tX)^k}{k!} = X\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(tX)^{k-1}}{(k-1)!} = Xe^{tX}$$

(όπου η εναλλαγή παραγώγου και αθροίσματος γίνεται από την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς $e^{tX}$). Επομένως:

$$e^{0X} = \mathrm{Id} \text{ και } \frac{d}{dt}e^{tX}\Big|_{t=0} = X$$

□

Σημειώνουμε ότι, εάν $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ είναι η άλγεβρα όλων των πινάκων, τότε η εκθετική απεικόνιση παίρνει τη μορφή $\exp : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$.

Ένας πολύ σημαντικός τύπος για την εκθετική απεικόνιση στην περίπτωση των πινάκων είναι ο λεγόμενος τύπος των Baker-Campbell-Hausdorff, που ουσιαστικά γενικεύει την περίπτωση της Παρατήρησης 1.4 στους πίνακες που δεν μετατίθενται κατ' ανάγκη.

**Πρόταση 1.2** (Ο τύπος των Baker-Campbell-Hausdorff)**.** *Για κάθε $X, Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ έχουμε:*

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp\Big(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3)\Big)$$

*Μάλιστα ο όρος $O(t^3)$ είναι στην πραγματικότητα $O\big(t^3[X,[X,Y]] + t^3[Y,[X,Y]]\big)$.*

*Απόδειξη:* Η απόδειξη είναι ένας απλός υπολογισμός. Αναπτύσσοντας τα αθροίσματα έχουμε:

$$\begin{aligned}\exp(tX)\exp(tY) &= \Big(\mathrm{Id} + tX + \frac{t^2}{2}X^2 + O(t^3)\Big)\Big(\mathrm{Id} + tY + \frac{t^2}{2}Y^2 + O(t^3)\Big)\\ &= \mathrm{Id} + t(X+Y) + \frac{t^2}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) + O(t^3)\end{aligned}$$

Αντίστοιχα, εάν αναπτυχθεί το:

$$\exp\Big(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3)\Big)$$

θα καταλήξουμε στον ίδιο τύπο. Με προσεκτικούς υπολογισμούς κανείς βλέπει πάλι ότι ο όρος $O(t^3)$ είναι στην πραγματικότητα $O\big(t^3[X,[X,Y]] + t^3[Y,[X,Y]]\big)$.

□

Για διάφορες συγκεκριμένες περιπτώσεις είναι χρήσιμη και η μετάθεση της ορίζουσας με το ίχνος, την οποία βλέπουμε με την επόμενη παρατήρηση.

**Παρατήρηση 1.5.** *Έστω $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Αληθεύει η σχέση:*

$$\exp(\mathrm{tr}\, X) = \det(\exp X)$$

*Απόδειξη:* Εάν είμαστε υπεράνω του $\mathbb{C}$, οι πίνακες τριγωνοποιούνται. Μένει λοιπόν κανείς να παρατηρήσει τη σχέση για τριγωνικούς πίνακες (καθώς επίσης και τη σχέση $e^{A^{-1}XA} = A^{-1}e^X A$).

□

## 1.3 Διαφόριση των κυματοσυναρτήσεων και κατανομές

Στην αρχή αυτού του κεφαλαίου αναφερθήκαμε, ομολογουμένως κάπως βιαστικά, στα αξιώματα της κβαντομηχανικής. Εξάγαμε τον τύπο του Schrödinger κάνοντας κάποιες κλασικές παραδοχές, αλλά δεν εξηγήσαμε καθόλου πώς είναι δυνατόν μία εξίσωση με παραγώγους όπως αυτή να ισχύει για κάθε κυματοσυνάρτηση $\Psi$, που εν γένει είναι $L^2$.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

Εδώ θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε την διαφορισιμότητα με την $L^2-$έννοια, χρησιμοποιώντας κατανομές.

Μία κλασική μέθοδος με την οποία είναι δυνατόν κανείς να επεκτείνει τον ορισμό της παραγώγου είναι χρησιμοποιώντας την παραγοντική ολοκλήρωση (ή, κατά βάση, το θεώρημα της απόκλισης) από τον απειροστικό λογισμό. Δεδομένων δύο συναρτήσεων $f, \varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ που έχουν όση ομαλότητα απαιτεί το θεώρημα της απόκλισης, μπορούμε να πάρουμε:

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi \, dx + f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega \nabla \cdot (f\varphi)e_i \, dx = \int_{\partial\Omega} (f\varphi)e_i \cdot \widehat{n}\, dS = \int_{\partial\Omega} (f\varphi)\widehat{n}_i \, dS$$

Όπου $\widehat{n}$ είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στο $\partial\Omega$, που συμφωνεί με τον προσανατολισμό του $\Omega$. Δηλαδή έχουμε τον τύπο της παραγοντικής ολοκλήρωσης:

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi \, dx = -\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial\Omega} (f\varphi)\widehat{n}\, dS$$

Εάν μάλιστα η $\varphi$ έχει συμπαγή φορέα $\operatorname{supp} \varphi \Subset \Omega$, τότε οι συνοριακοί όροι εξαλείφονται κι έχουμε:

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi \, dx = -\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx$$

Η αξία του παραπάνω τύπου είναι φυσικά η μεταφορά της παραγώγου από την $f$ στην $\varphi$, και η ιδέα που αυτό μας καλλιεργεί, ότι ορισμένα αποτελέσματα που σχετίζονται με την παράγωγο της $f$ μπορούν να εξαχθούν από την παράγωγο της $\varphi$.

Εάν λοιπόν η $f$ δεν είναι αναγκαστικά ομαλή αλλά απλώς ολοκληρώσιμη, κανείς μπορεί να ορίσει την Sobolev ή ασθενή παράγωγο της $f$ ως την $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ συνάρτηση $\partial f/\partial x_i$ με την ιδιότητα:

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi \, dx = -\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx \text{ για κάθε } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Φυσικά πρέπει κανείς να δείξει ότι αυτός ο ορισμός είναι καλός, με την έννοια ότι δεν υπάρχουν πολλές ασθενείς παράγωγοι μίας συνάρτησης.

**Παρατήρηση 1.6.** *Έστω $f$ μία τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση για την οποία υπάρχει ασθενής παράγωγος $v$. Εάν $u$ είναι άλλη μία ασθενής παράγωγος, τότε $u = v$ (εννοείται σχεδόν παντού).*

*Απόδειξη:* Πράγματι, ο ορισμός της ασθενούς παραγώγου δίνει:

$$\int_\Omega v\varphi \, dx = -\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega u\varphi \text{ για κάθε } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

δηλαδή:

$$\int_\Omega (u - v)\varphi = 0 \text{ για κάθε } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Αυτό δίνει το ζητούμενο.

□

Μεγαλύτερης τάξης παράγωγοι μπορούν να οριστούν επίσης, χρησιμοποιώντας διαδοχικά την παραγοντική ολοκλήρωση. Εάν $\alpha$ είναι ένας πολυδείκτης, η ασθενής παράγωγος $D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}$ ορίζεται ως εξής:

$$\int_\Omega \varphi D^\alpha f \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f D^\alpha \varphi \, dx \text{ για κάθε } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Τους χώρους των συναρτήσεων που έχουν ασθενείς παραγώγους τάξης $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k$ που είναι $L^p$, τους συμβολίζουμε με $W^{k,p}(\Omega)$, και τους ονομάζουμε Sobolev χώρους.

**Το πρόβλημα:** Ο χώρος που ουσιαστικά μας ενδιαφέρει, ο $W^{2,2}(\Omega)$, δεν ταυτίζεται με τον $L^2$, και μάλιστα είναι γνήσιο υποσύνολό του $W^{2,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Αυτό σημαίνει ότι ακόμα και με αυτήν την γενικευμένη παράγωγο, οι κυματοσυναρτήσεις δεν είναι όλες ασθενώς παραγωγίσιμες.

Το πρόβλημα αυτό επιλύεται με την χρήση κατανομών. Κύριος χώρος για την ανάπτυξη των κατανομών είναι ο χώρος του Schwartz, ή αλλιώς των ταχέως φθίνοντων συναρτήσεων:

**Ορισμός 1.10** (Ο χώρος του Schwartz). *Ο χώρος του Schwartz ορίζεται ως εξής:*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \;\middle|\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n,\ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty \right\}$$

*όπου* $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ *και* $D^\beta = \partial^{|\beta|}/\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}$. *Συνηθέστερη μετρική είναι η:*

$$d_{\mathcal{S}}(\lozenge, \blacklozenge) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{||\mathrm{id}^\alpha D^\beta(\lozenge - \blacklozenge)||_{L^\infty}}{1 + ||\mathrm{id}^\alpha D^\beta(\lozenge - \blacklozenge)||_{L^\infty}}$$

*κι επίσης υπάρχουν οι ημινόρμες:*

$$||\lozenge||_{\alpha,\beta;\mathcal{S}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \lozenge(x)| \text{ και } ||\lozenge||_{N;\mathcal{S}} = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leqslant N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \lozenge(x)|$$

Οι συναρτήσεις στον χώρο του Schwartz είναι συναρτήσεις των οποίων όλες οι παράγωγοι φθίνουν γρήγορα, γρηγορότερα από κάθε ρητή συνάρτηση $1/x^\alpha$ (εξού και η ορολογία «ταχέως φθίνουσες»).

Κατά την αναζήτηση της ασθενούς παραγώγου, βασική παρατήρηση ήταν η παραγοντική ολοκλήρωση (χωρίς συνοριακούς όρους):

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi \, dx = - \int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx, \text{ για κάθε } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Ο λόγος που η έκφραση αυτή δεν εξασφαλίζει πάντοτε την ύπαρξη της παραγώγου $\partial f/\partial x_i$ είναι το γεγονός ότι η $f$ μπορεί να έχει τόσες παθογένειες ώστε το πρώτο ολοκλήρωμα να μην μπορεί να ισούται με το δεύτερο για καμία $\partial f/\partial x_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Για παράδειγμα, μία ουσιαστική ανωμαλία όπως είναι αυτή της:

$$f(x) = H(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

δημιουργεί προβλήματα, αφού όταν ο φορέας της $\varphi$ βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα, θα έχουμε μία ισότητα της μορφής $0 = \lambda < 0$. Φυσικά μία απλή ασυνέχεια συνήθως δεν είναι ικανή να καταστρέψει την ασθενή παραγωγισιμότητα, τυχαίνει όμως το προηγούμενο παράδειγμα να είναι τέτοιο. Μάλιστα αρκετά ιδιάζουσες συναρτήσεις, όπως για παράδειγμα με άπειρους πυκνούς πόλους, ενδέχεται να είναι παραγωγίσιμες με την ασθενή έννοια. Παραδείγματα μπορούν να βρεθούν στο [9].

Παρά την μη ύπαρξη συνάρτησης σε κάθε περίπτωση που να αποτελεί παράγωγο, κανείς θα έλεγε ότι τα βασικά εργαλεία για την περιγραφή της παραγώγου υπάρχουν.

Υπάρχει δηλαδή το συναρτησοειδές $T(\lozenge) = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \lozenge \, dx$, κι επίσης μπορεί να οριστεί το:

$$\partial_i T(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = -\int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx \text{ για } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Εάν δεν ασχοληθούμε λοιπόν με την $f$ αλλά με το συναρτησοειδές $T$, υπάρχει ένα συναρτησοειδές $\partial_i T$ που φαίνεται να μοιάζει με την παράγωγο του $T$. Στη θεωρία κατανομών συνηθίζεται την εκτίμηση με το συναρτησοειδές να τη συμβολίζουμε με $\langle T, \lozenge \rangle$, οπότε με αυτούς τους συμβολισμούς:

$$\langle \partial_i T, \varphi \rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx \text{ για } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Ο συμβολισμός $\langle \cdot, \cdot \rangle$ χρησιμοποιείται για να θυμίζει εσωτερικό γινόμενο και τη σχέση με την παραγοντική ολοκλήρωση.

Φαίνεται λοιπόν ότι, εάν κανείς ασχοληθεί με στοιχεία $T$ του δυϊκού χώρου $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)'$ θα μπορεί να έχει μία επιπλέον έννοια διαφορισιμότητας. Βέβαια για τη δική μας περίπτωση δεν αρκεί μονάχα ο χώρος $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)'$, και γι' αυτό θα χρειαστεί να μελετήσουμε συναρτησοειδή στον χώρο του Schwartz. Σημειώνουμε ότι με αυτήν μας την επιλογή στην πραγματικότητα ασχολούμαστε με λιγότερα συναρτησοειδή, αφού $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n)'$.

**Ορισμός 1.11** (Κατανομές). *Ονομάζουμε κατανομή στον χώρο του Schwartz (ή tempered κατανομή, ή απλώς κατανομή) κάθε συναρτησοειδές $T$ στον δυϊκό χώρο $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$. Την εκτίμηση του συναρτησοειδούς $T$ σε συνάρτηση $f$ θα τη συμβολίζουμε κατά τα συνήθη με $\langle T, f \rangle$, ώστε να θυμίζει εσωτερικό γινόμενο.*

Η παράγωγος, όπως αυτή διερευνήθηκε προηγουμένως, είναι πράγματι γενίκευση της συνήθους παραγώγου. Αυτό το βλέπουμε με την ακόλουθη παρατήρηση:

**Παρατήρηση 1.7.** *Ισχύει ο εγκλεισμός:*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$$

*Με την ακόλουθη έννοια:*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto T_f(\lozenge) = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \lozenge \, dx \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$$

**Ορισμός 1.12** (Παράγωγος μίας κατανομής). *Έστω $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ μία κατανομή. Ορίζουμε την παράγωγο της κατανομής $T$, έστω $\partial_i T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$, μέσω του τύπου:*

$$\langle \partial_i T, \varphi \rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle, \text{ για κάθε } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Μένει να αποδειχθεί ότι η παράγωγος της κατανομής είναι αρκετά ισχυρή έννοια ώστε να περιέχει όλες τις $L^2-$συναρτήσεις. Από την στιγμή που διαθέτουμε ένα τέτοιο αποτέλεσμα στα χέρια μας, θα μπορούμε να γράφουμε άφοβα $\partial \Psi / \partial x_i$ για τις κυματοσυναρτήσεις, υπονοώντας ότι $\partial \Psi / \partial x_i = \partial_i T_\Psi$, όπου $T_\Psi$ είναι η κατανομή που προέρχεται από την $\Psi$.

**Πρόταση 1.3** (Οι βασικοί εγκλεισμοί). *Αληθεύουν οι εγκλεισμοί:*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$$

*Απόδειξη:* Για τον πρώτο εγκλεισμό, έστω $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Εφόσον η $\varphi$ είναι ταχέως φθίνουσα, μπορούμε να γράψουμε $\varphi = O(1/|x|^2)$. Επομένως, εάν το $O$ της $\varphi$ υλοποιείται έξω από κάποιον δίσκο $B = B(0,r)$, τότε:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 \, dx \leqslant \int_B |\varphi(x)|^2 \, dx + O\left(\int_{B^c} \frac{1}{|x|^4} \, dx\right) < \infty$$

Δηλαδή $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Για τον δεύτερο εγκλεισμό, έστω $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Εάν $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, τότε και πάλι από την ταχεία φθίση μπορούμε να έχουμε:

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{C}{1+|x|^2}, \text{ και μάλιστα } C = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|(1+|x|^2)\varphi(x)\right|$$

Επομένως, ολοκληρώνοντας και με Hölder παίρνουμε:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi \, dx\right| \leqslant ||f||_{L^2} \cdot ||\varphi||_{L^2}$$

Για την $L^2-$νόρμα της $\varphi$, παρατηρούμε ότι:

$$||\varphi||_{L^2} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{C^2}{(1+|x|^2)^2}\right)^{1/2} \leqslant C \left|\left|\frac{1}{1+|x|^2}\right|\right|_{L^2} = M \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|(1+|x|^2)\varphi(x)\right| = M \cdot ||\varphi||_{2;\mathcal{S}}$$

και κατά συνέπεια:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi \, dx\right| \leqslant M \cdot ||f||_{L^2} \cdot ||\varphi||_{2;\mathcal{S}}$$

Αυτό δείχνει ότι το συναρτησοειδές:

$$T_f(\Diamond) = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \Diamond \, dx$$

είναι συνεχές, και κατά συνέπεια $T_f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$. Οπότε δείξαμε ότι $L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.

$\square$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# Μετασχηματισμοί Fourier και ο δυϊσμός θέσης-ορμής

## 2.1 Ο μετασχηματισμός Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier στην φυσική είναι καίριας σημασίας, αφού μας δίνει κάποιου είδους δυϊσμό της θέσης και της ορμής, κι επίσης διαγωνοποιεί τον τελεστή της ορμής.

Όσον αφορά μία απλούστερη διακριτή περίπτωση, κανείς ασχολείται με τους συντελεστές Fourier και τις σειρές Fourier. Από τους ορισμούς που θα δοθούν, θα γίνει φανερό ότι το ένα είναι το διακριτό / συνεχές ανάλογο του άλλου. Το εν λόγω χωρίο το παραθέτουμε για δύο λόγους:

i. Προκειμένου να φανεί σε ένα πρώτο στάδιο η σχέση θέσης-ορμής.

ii. Για να καταλήξουμε σε έναν τύπο για τις κυματασυναρτήσεις, που είναι το διακριτό ανάλογο αυτού που θα δούμε στην επόμενη παράγραφο 2.2.

Ας θεωρήσουμε για ευκολία την περίπτωση της μίας χωρικής διάστασης στον $L^2$. Βασικό εργαλείο στον $L^2$ χώρο είναι οι σειρές Fourier, τις οποίες θα θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να μεταβούμε από τη συνεχή στη διακριτή περίπτωση. Είναι γνωστό θεώρημα ότι, εάν $\widehat{f}(k)$ είναι οι συντελεστές Fourier μίας $2\pi-$περιοδικής συνάρτησης, τότε:

$$\lim_{n\to\infty}{}^{||\cdot||_{L^2}} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ik(\cdot)} = f(x)$$

Είναι ίσως προβληματικό το γεγονός της $2\pi-$περιοδικότητας των $L^2-$συναρτήσεων που προσεγγίζονται, στη βασική θεωρία των σειρών Fourier. Το τέχνασμα που δίνει λύση σε αυτήν την περίπτωση είναι κανείς να δουλέψει με τον μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{S}^1$, στον οποίον οι συναρτήσεις εμφανίζουν εκ φύσεως περιοδικότητα, κι έπειτα να αφεθεί η ακτίνα του να τείνει στο άπειρο.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν $2\pi-$περιοδικές συνοριακές συνθήκες στις συναρτήσεις $f \in L^2(\mathbb{R})$, πράγμα που μας δίνει τον χώρο $L^2(\mathbb{S}^1)$, με εσωτερικό γινόμενο:

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}g \, dx$$

Η συγκεκριμένη μορφή του εσωτερικού γινομένου δεν θα εξηγηθεί, αλλά υπάρχει στο [6][1]. Στον νέο χώρο $L^2(\mathbb{S}^1)$ η γεωμετρία είναι αυτή του κύκλου $\mathbb{S}^1$, κι επομένως η θέση

[1] Στις σημειώσεις εκείνες συμβολίζεται με $L^2$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων με την $L^2-$νόρμα, και με $\widetilde{L^2}$ ο «κανονικός» $L^2-$χώρος (ως πλήρωση). Αυτή η ιδιαιτερότητα υπάρχει διότι αποφεύγεται εντελώς η χρήση θεωρίας μέτρου.

$x$ αντιστοιχεί σε γωνία $\theta$. Επίσης, οι μεταφορές γίνονται περιστροφές, δηλαδή στοιχεία της γενικής ορθογώνιας ομάδας:

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid AA^\top = A^\top A = \mathrm{Id},\ \det A = 1\right\}$$

(ορθογώνιες απεικονίσεις χωρίς ανακλάσεις).

**Ορισμός 2.1** (Συντελεστές Fourier και σειρές Fourier). *Έστω $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$. Ορίζουμε για τα διάφορα $k \in \mathbb{Z}$ τους συντελεστές Fourier:*

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$$

*κι επίσης τη σειρά Fourier:*

$$\lim_{n\to\infty}{}^{\|\cdot\|_{L^2}} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}$$

Βασικές ιδιότητες για τις σειρές Fourier στον $L^2$ θα αναφερθούν παρακάτω, αλλά δεν θα αποδειχθούν, καθώς δεν τις χρειαζόμαστε σε άλλο πλαίσιο πέρα από το παρόν. Μία ενδεχομένως λιγότερο συχνή μέθοδος που αποδεικνύει βασικά αποτελέσματα για τις σειρές Fourier (όπως το γεγονός ότι η $\{e^{ik(\cdot)}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2(\mathbb{S}^1)$), είναι αυτή που βασίζεται σε μία ιδιότητα ελαχιστοποίησης που χαρακτηρίζει τους συντελεστές Fourier. Μπορείτε να βρείτε λεπτομέρειες στο [6].

Ξεκινώντας λοιπόν τη μελέτη μας ορίζουμε:

$$\rho(\theta)\Psi(\varphi) = \Psi(\varphi - \theta)$$

και παίρνουμε μία αναπαράσταση $\rho : \mathrm{SO}(2) \to \mathrm{GL}(L^2(\mathbb{S}^1))$ της $\mathrm{SO}(2)$. Εάν επίσης το $X$ παράγει την αντίστοιχη άλγεβρα Lie $\mathfrak{so}(2) = T_{\mathrm{Id}}\mathrm{SO}(2) \cong (\mathbb{R}, +)$, τότε μπορούμε με παραγώγιση της $\rho$ να περάσουμε σε αναπαράσταση $R$ της άλγεβρας Lie. Σημειώνουμε ότι το διαφορικό στη γεωμετρία είναι ένας κλασικός τρόπος κανείς να μεταφερθεί στον εφαπτόμενο χώρο, από την πολλαπλότητα. Λόγω της Παρατήρησης 1.5, μπορούμε να επιλέξουμε:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

που παράγει την $\mathfrak{so}(2)$, κι οπότε τότε:

$$R(aX)\Psi(\varphi) = \frac{d}{d\theta}\Psi(\varphi - a\theta)\Big|_{\theta=0} = -a\frac{d}{d\varphi}\Psi(\varphi),\ \text{άρα } R(aX) = -a\frac{d}{d\varphi}$$

Τώρα ο τελεστής $R$ είναι στην ουσία παραγώγιση, οπότε σχετίζεται με την ορμή $p = -\hbar \cdot d/d\varphi$. Η αναπαράσταση λοιπόν της άλγεβρας Lie $\mathfrak{so}(2)$ είναι αυτό που δικαιολογεί τη μεταφορά από τη μελέτη της θέσης (εν προκειμένω γωνίας), στη μελέτη της ορμής.

Χρησιμοποιώντας τις σειρές Fourier, μπορούμε να πούμε κάτι παραπάνω, σχετικά με τις κυματοσυναρτήσεις. Με ανάπτυγμα των κυματοσυναρτήσεων σε σειρές Fourier, παίρνουμε τον τύπο:

$$\Psi(\cdot) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\Psi}(k)e^{ik(\cdot)}$$

δηλαδή, από τη σχέση του de Broglie $p = \hbar k$:

$$\Psi(\cdot) = \sum_{p \in \hbar\mathbb{Z}} \widehat{\Psi}(p/\hbar) e^{ip(\cdot)/\hbar}$$

που δείχνει την ταύτιση -μέσω της αντιστοιχίας $L^2(\mathbb{S}^1) \ni f \leftrightarrow \left(\widehat{f}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$- των κυματοσυναρτήσεων με το «φάσμα της ορμής».

### 2.1.1 Ο μετασχηματισμός Fourier στον $L^2$

Το προηγούμενο τέχνασμα, δηλαδή η ενασχόλιση με τον κύκλο $\mathbb{S}^1$, του οποίου αφήνουμε την ακτίνα να τείνει στο άπειρο, δεν είναι αρκετό για να δώσει μία ολοκληρωμένη εικόνα της κβαντομηχανικής. Χρειάζεται να φύγουμε από τη διακριτή περίπτωση και να μεταβούμε στη συνεχή. Ο μετασχηματισμός Fourier είναι στην ουσία το συνεχές ανάλογο των συντελεστών Fourier, και ορίζεται μέσω του τύπου:

$$(\mathcal{F}f)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ik\cdot x}\, dx,\ k \in \mathbb{R}^n$$

Φυσικά εμείς θέλουμε οι $f$ να έχουν τον ρόλο των κυματοσυναρτήσεων, δηλαδή να είναι $L^2$. Το πρόβλημα είναι ότι ο παραπάνω τύπος δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για όλες τις $L^2-$συναρτήσεις, αφού ενδέχεται το ολοκλήρωμα να μην συγκλίνει. Δουλεύουμε λοιπόν, αναγκαστικά, στον καταλληλότερο χώρο του Schwartz $\mathcal{S}$, και την γενικότερη περίπτωση του $L^2$ θα την εξάγουμε με όρια.

**Ορισμός 2.2** (Μετασχηματισμός Fourier). *Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier μέσω του τύπου:*

$$(\mathcal{F}f)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ik\cdot x}\, dx,\ k \in \mathbb{R}^n$$

Σημαντική βέβαια παρατήρηση προκειμένου τα παραπάνω να μπορούν να γίνουν είναι η ακόλουθη:

**Παρατήρηση 2.1.** *Ο χώρος $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $L^2(\mathbb{R}^n)$, δηλαδή:*

$$\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}^{||\cdot||_{L^2}} = L^2(\mathbb{R}^n)$$

*Απόδειξη:* Είναι συνέπεια του ότι:

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n) \text{ και } \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}^{||\cdot||_{L^2}} = L^2(\mathbb{R}^n)$$

(η τελευταία ισότητα μπορεί να αποδειχθεί, για παράδειγμα, με ομαλοποιητές -δείτε το [9]).

□

Είναι φανερό, από την ταχεία φθίση των συναρτήσεων του χώρου του Schwartz, ότι ο μετασχηματισμός Fourier ορίζεται για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Βασικό εργαλείο είναι η αντιστροφή Fourier $\widehat{\mathcal{F}}$, που αποτελεί τον αντίστροφο τελεστή $\widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}$. Η σημασία του τελεστή βρίσκεται στην επέκτασή του στον $L^2$, μέσω της οποίας κανείς μπορεί να πάρει μία σύνδεση (intertwiner) αναπαραστάσεων στον $L^2$.

Ο $\widehat{\mathcal{F}}$ ορίζεται μέσω του τύπου:

$$\widehat{\mathcal{F}}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ik\cdot x}\, dx, \; k \in \mathbb{R}^n$$

και είναι πράγματι αντίστροφος του $\mathcal{F}$, σύμφωνα με την επόμενη πρόταση.

**Λήμμα 2.1** (Πολλαπλασιαστικός τύπος)**.** *Για κάθε $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ισχύει ο τύπος:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(k) g(k)\, dk = \int_{\mathbb{R}^n} f(k)(\mathcal{F}g)(k)\, dk$$

*Απόδειξη:* Είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Fubini.

□

**Πρόταση 2.1** (Αντιστροφή Fourier)**.** *Για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε:*

$$f(x) = (\widehat{\mathcal{F}}\mathcal{F}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(k) e^{ik\cdot x}\, dk$$

*Απόδειξη:* Ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$g(k) = e^{2\pi i k\cdot y} e^{-\pi|\varepsilon k|^2}$$

και με υπολογισμό βρίσκουμε:

$$(\mathcal{F}g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\varepsilon^n} e^{-\pi|(x-y)/\varepsilon|^2}$$

Η παραπάνω ποσότητα, και για την ακρίβεια η $\gamma(x) = (2\pi)^{n/2}(\mathcal{F}g)(x+y)$, είναι στην πραγματικότητα ένας ομαλοποιητής. Κατά συνέπεια μπορεί να προσεγγίσει την $f$ μέσω συνέλιξης. Δηλαδή, εάν:

$$(f * \gamma)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\gamma(x-y)\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\mathcal{F}g)(x)\, dx$$

τότε $(f * \gamma)(y) \to f(y)$ καθώς $\varepsilon \to 0^+$. Επομένως, γράφουμε από το Λήμμα 2.1:

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{1}{\varepsilon^n} e^{-\pi|(x-y)/\varepsilon|^2}\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(k) e^{2\pi i k\cdot y} e^{-\pi|\varepsilon k|^2}\, dk$$

και με $\varepsilon \to 0^+$, το αριστερό μέλος γίνεται $f(y)$. Στο δεξί μέλος, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue, θα έχουμε:

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(k) e^{2\pi i k\cdot y} e^{-\pi|\varepsilon k|^2}\, dk \to \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(k) e^{2\pi i k\cdot y}\, dk$$

Σημειώνουμε μόνο το εξής σημείο, ότι η $\mathcal{F}f$ είναι πράγματι ολοκληρώσιμη. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση είναι θετική (χωρίς βλάβη της γενικότητας, χωρίζοντας σε θετικά και αρνητικά μέρη). Προσεγγίζουμε, όπως πριν, μέσω συνελίξεων $f * \eta_\varepsilon$ την $\mathcal{F}f$ (για κατάλληλες συναρτήσεις $\eta_\varepsilon$), και τότε έχουμε από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης ότι:

$$f * \eta_\varepsilon \to \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f\, dk$$

Τώρα όμως, εάν για παράδειγμα:

$$\eta_\varepsilon(k) = e^{2\pi i k\cdot x} e^{-\pi|\varepsilon k|^2}$$

θα έχουμε $f * \eta_\varepsilon \to f(0)$, πράγμα που αποδεικνύει ότι:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f \; dk = f(0) < \infty$$

$\square$

Μάλιστα, εάν κανείς παρατηρήσει ότι $(\widehat{\mathcal{F}}f)(k) = (\mathcal{F}f)(-k)$, η παραπάνω σχέση με την αλλαγή $f(x) \rightsquigarrow f(-x)$ δίνει και την δεξιά αντιστροφή:

$$f(x) = (\mathcal{F}\widehat{\mathcal{F}}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{\mathcal{F}}f)(k) e^{-ik\cdot x} \; dk$$

**Ορισμός 2.3** (Αντίστροφος ή συζυγής μετασχηματισμός Fourier)**.** *Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier μέσω του τύπου:*

$$(\widehat{\mathcal{F}}f)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ik\cdot x} \; dx, \; k \in \mathbb{R}^n$$

**Πρόταση 2.2** (Ο τύπος του Plancherel για συναρτήσεις Schwartz)**.** *Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Αληθεύει ότι $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, καθώς επίσης και ο τύπος:*

$$||\mathcal{F}f||_{L^2} = ||f||_{L^2}$$

*Απόδειξη:* Ορίζουμε $g(x) = \overline{f(-x)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ και, από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier, έχουμε ότι $\mathcal{F}f = \overline{\mathcal{F}f}$. Για τη συνέλιξη $f * g$ έχουμε, από την αντιστροφή Fourier:

$$(f*g)(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}(f*g))(k) \; dk$$

Επίσης:

$$(f*g)(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(-x) \; dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \; dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} ||f||^2_{L^2}$$

και:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}(f*g))(k) \; dk &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(k)(\mathcal{F}g)(k) \; dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(k)\overline{(\mathcal{F}f)(k)} \; dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \big|(\mathcal{F}f)(k)\big|^2 \; dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} ||\mathcal{F}f||^2_{L^2} \end{aligned}$$

πράγμα που αποδεικνύει την πρόταση.

□

Ο μετασχηματισμός Fourier και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier μπορούν να επεκταθούν σε ολόκληρο τον $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ήδη έχουμε αποδείξει τη βασική ισότητα:

$$\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}^{||\cdot||_{L^2}} = L^2(\mathbb{R}^n)$$

οπότε το μόνο που χειάζεται να δειχθεί είναι μία έννοια συνέχειας για τις $\mathcal{F}, \widehat{\mathcal{F}}$. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω του φράγματος των τελεστών, για παράδειγμα του $\mathcal{F}$. Γνωρίζουμε από τον τύπο του Plancherel ότι:

$$||\mathcal{F}f||_{L^2} = ||f||_{L^2}, \text{ για } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

(δηλαδή είναι ισομετρία). Για τον αντίστροφο μετασχηματισμό $\widehat{\mathcal{F}}$, μπορούμε να αποδείξουμε την ισομετρία:

$$||\widehat{\mathcal{F}}f||_{L^2} = ||f||_{L^2}, \text{ για } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

όπως στην Πρόταση 2.2, χρησιμοποιώντας τη δεξιά αντιστροφή.

Κατά συνέπεια, υπάρχει $L^2-$επέκταση του μετασχηματισμού Fourier και του αντίστροφού του, τις οποίες θα συμβολίζουμε και πάλι με $\mathcal{F}, \widehat{\mathcal{F}}$. Οι $\mathcal{F}, \widehat{\mathcal{F}}$ είναι επίσης $L^2-$ισομετρίες και η μία αντίστροφη της άλλης, λόγω επέκτασης.

### 2.1.2 Ο μετασχηματισμός Fourier στον $\mathcal{S}'$

Ο μετασχηματισμός Fourier επεκτείνεται και στον χώρο των κατανομών $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$. Η ιδέα εδώ, όπως και στον ορισμό των παραγώγων, είναι ο μετασχηματισμός να αναχθεί σε άλλες συναρτήσεις, και συγκεκριμένα στις συναρτήσεις Schwartz. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω του πολλαπλασιαστικού τύπου που έχουμε ήδη δει:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(k)g(k)\, dk = \int_{\mathbb{R}^n} f(k)(\mathcal{F}g)(k)\, dk, \; f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Δηλαδή, ο μετασχηματισμός Fourier της $f$, που πάλι θα τον συμβολίζουμε με $\mathcal{F}f$, είναι η κατανομή αυτή για την οποία:

$$\langle \mathcal{F}f, g\rangle = \langle f, \mathcal{F}g\rangle, \text{ για κάθε } g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Τόσο το καλά ορισμένο (δηλαδή η μοναδικότητα) όσο και η ιδιότητα της επέκτασης, αποδεικνύονται όπως στην Παρατήρηση 1.6.

Όσον αφορά τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, από τον προηγούμενο πολλαπλασιαστικό τύπο δεν είναι δύσκολο κανείς να λάβει τον:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{\mathcal{F}}f)(k)g(k)\, dk = \int_{\mathbb{R}^n} f(k)(\widehat{\mathcal{F}}g)(k)\, dk, \; f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

και κατά συνέπεια να ορίσει, κατ' αναλογία:

$$\langle \widehat{\mathcal{F}}f, g\rangle = \langle f, \widehat{\mathcal{F}}g\rangle, \text{ για κάθε } g \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

**Ορισμός 2.4** (Ο μετασχηματισμός Fourier και ο αντίστροφός του στον $\mathcal{S}'$). *Οι μετασχηματισμοί Fourier επεκτείνονται στις κατανομές $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ μέσω των σχέσεων:*

$$\langle \mathcal{F}f, g\rangle = \langle f, \mathcal{F}g\rangle, \text{ για κάθε } g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

*και:*

$$\langle \widehat{\mathcal{F}}f, g\rangle = \langle f, \widehat{\mathcal{F}}g\rangle, \text{ για κάθε } g \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

## 2.2 Ο δυϊσμός θέσης-ορμής

Στα παρακάτω θα περιοριστούμε στη μία διάσταση. Όπως και στη διακριτή περίπτωση, οι κυματοσυναρτήσεις μπορούν να εκφταστούν, κατά κάποιον τρόπο, από το «φάσμα της ορμής». Αυτό κανείς μπορεί να το παρατηρήσει μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, δηλαδή γράφοντας:

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\Psi)(k) e^{ikx}\, dk$$

και από τη σχέση του de Broglie $p = \hbar k$:

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\Psi)(p/\hbar) e^{ipx/\hbar}\, dp$$

Στη διακριτή περίπτωση είδαμε, μέσω της αναπαράστασης του $\mathfrak{so}(2)$, τη σχέση μεταξύ της θέσης και της ορμής. Στη συνεχή περίπτωση, φαίνεται ότι η αντίστοιχη συσχέτιση θα γίνει μέσω του μετασχηματισμού Fourier, αφού αυτός μπορεί να μετατρέψει τη μεταφορά σε στροφή. Αυτό κανείς το βλέπει με έναν απλό υπολογισμό:

$$(\mathcal{F}\Psi(\Diamond + \theta))(k) = e^{ik\theta}(\mathcal{F}\Psi)(k)$$

Δεδομένου του μετασχηματισμού Fourier, η θέση και η ορμή μπορούν να «εναλλάσσονται». Με παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{F}\frac{d\Psi}{dx}\right)(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left.\frac{d\Psi}{dx}\right|_x e^{-ikx}\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Psi(x)e^{-ikx}}{dx} - \Psi(x)\frac{de^{-ikx}}{dx}\, dx \\
&= \frac{ik}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)e^{-ikx}\, dx \\
&= ik(\mathcal{F}\Psi)(k)
\end{aligned}$$

Δηλαδή, με τον μετασχηματισμό Fourier η παραγώγιση γίνεται πολλαπλασιασμός. Εάν λοιπόν θεωρήσουμε τον τελεστή της θέσης $Q\Psi(x) = x\Psi(x)$, μπορούμε να πάρουμε μία αναπαράσταση $R_Q : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(L^2(\mathbb{R}))$, $R_Q(k)\Psi(x) = \hbar e^{ikx} Q\Psi(x)$. Αντίστοιχα, ο τελεστής της ορμής $P\Psi(x) = -i\hbar \cdot d\Psi/dx$ δίνει μία αναπαράσταση $R_P : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(L^2(\mathbb{R}))$, $R_P(k)\Psi(x) = P\Psi(x+k)$, και ο μετασχηματισμός Fourier, αφού μετατρέπει την παραγώγιση σε πολλαπλασιασμό, είναι στην πραγματικότητα μία σύνδεση των δύο αναπαραστάσεων $R_Q, R_P$. Πράγματι, με μετασχηματισμό Fourier στην $R_P$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\big(R_P(y)\Psi\big)(k) &= \mathcal{F}\left(-i\hbar \cdot \frac{d}{dx}\Psi(\Diamond + y)\right)(k) \\
&= -i\hbar e^{iky}\mathcal{F}\left(\frac{d\Psi}{dx}\right) \\
&= \hbar e^{iky} k(\mathcal{F}\Psi)(k) \\
&= \hbar e^{iky} Q(\mathcal{F}\Psi)(k) \\
&= R_Q(y)(\mathcal{F}\Psi)(k)
\end{aligned}$$

Εφόσον ο $\mathcal{F}$ έχει αντίστροφο, οι αναπαραστάσεις $R_Q, R_P$ είναι στην πραγματικότητα ισοδύναμες.

Η σχέση μεταξύ των $Q, P$ είναι μάλιστα ακόμη στενότερη, αφού ο μετασχηματισμός Fourier διατηρεί τις $L^2-$νόρμες. Συνέπεια αυτής της διατήρησης είναι και η διατήρηση του εσωτερικού γινομένου, αφού:

$$(f,g)_{L^2} = \frac{1}{4}\left(||f+g||_{L^2}^2 + ||f-g||_{L^2}^2 + i\cdot ||g+if||_{L^2}^2 - i\cdot ||g-if||_{L^2}^2\right)$$

Οπότε ο $\mathcal{F}$ είναι ορθομοναδιαίος τελεστής. Αναπαραστάσεις που σχετίζονται με ορθομοναδιαίες αμφιμονοσήμαντες συνδέσεις τις καλούμε ορθομοναδιαία ισοδύναμες (unitarily equivalent).

**Θεώρημα 2.1.** *Οι αναπαραστάσεις της θέσης και της ορμής,* $R_Q : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(L^2(\mathbb{R}))$ *και* $R_P : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(L^2(\mathbb{R}))$ *με:*

$$R_Q(k)\Psi(x) = \hbar e^{ikx} Q\Psi(x) \text{ και } R_P(k)\Psi(x) = P\Psi(x+k)$$

*είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμες, με σύνδεση τον μετασχηματισμό Fourier* $\mathcal{F}$.

$$\begin{tikzcd}
L^2(\mathbb{R}) \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "R_P(x)"'] & L^2(\mathbb{R}) \arrow[d, "R_Q(x)"] \\
L^2(\mathbb{R}) \arrow[r, "\mathcal{F}"'] & L^2(\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

Φυσικά οι τελεστές της θέσης και της ορμής δεν μπορούν να οριστούν από τον $L^2(\mathbb{R})$ στον εαυτό του, οπότε το παραπάνω θεώρημα σωπηρά υπονοεί περιορισμό σε κατάλληλο σύνολο (που μάλιστα είναι πυκνό, αφού περιέχει το $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). Παρόμοια προβλήματα θα συναντήσουμε και παρακάτω, στην αναπαράσταση του Schrödinger, τα οποία θα επιλύουμε με παρόμοιο τρόπο.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# Η άλγεβρα και η ομάδα του Heisenberg

## 3.1 Η άλγεβρα Lie και η ομάδα Lie του Heisenberg

### 3.1.1 Η άλγεβρα Lie του Heisenberg

Οι τελεστές της θέσης και της ορμής είναι κλασικά παραδείγματα τελεστών που δεν μετατίθενται. Εάν κανείς γράψει τους εν λόγω τελεστές στις συντεταγμένες τους, υπολογίζοντας τον μεταθέτη παίρνουμε:

$$[Q_j, P_\lambda]\Psi(x) = x_j \left( -i\hbar \frac{d\Psi}{dx_\lambda}\Big|_x \right) + i\hbar \frac{dx\Psi(x)}{dx_\lambda} x_j = i\hbar\delta_{j,\lambda} \cdot \Psi(x)$$

οι οποίες ονομάζονται κανονικές σχέσεις μετάθεσης (canonical commutation relations, ή CCR εν συντομία).

**Ορισμός 3.1** (Οι κανονικές σχέσεις μετάθεσης). *Οι τελεστές της θέσης και της ορμής ικανοποιούν τις σχέσεις:*

$$[Q_j, P_\lambda] = i\hbar \cdot \mathrm{id}$$

*που ονομάζονται κανονικές σχέσεις μετάθεσης.*

Αρκετά νωρίς κατά την ανάπτυξη της θεωρίας, ο Weil κατάλαβε ότι αυτές οι σχέσεις θα μπορούσαν να ιδωθούν μέσω μίας αγκύλης Lie, μίας $(2n+1)-$διάστατης άλγεβρας Lie. Η εν λόγω άλγεβρα ονομάστηκε αργότερα άλγεβρα Lie του Heisenberg.

Εμείς θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση όπου $n = 1$. Τα επιχειρήματα είναι ακριβώς ανάλογα στις περισσότερες διαστάσεις.

**Ορισμός 3.2** (Η άλγεβρα Lie του Heisenberg στη 1 διάσταση). *Η άλγεβρα Lie του Heisenberg $\mathfrak{h}_3$ είναι ο χώρος $\mathbb{R}^3$, με την αγκύλη Lie:*

$$[X, Y] = Z, \ [X, Z] = [Y, Z] = 0$$

*όπου $\{X, Y, Z\}$ είναι μία βάση του $\mathbb{R}^3$.*

Λόγω της ιδιομορφίας της τελευταίας συντεταγμένης, κανείς γράφει την άλγεβρα $\mathfrak{h}_3 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$. Εάν λοιπόν συμβολίσουμε $xX + yY + zZ = (x, y) \oplus z$, με αυτή τη γραφή, η αγκύλη Lie παίρνει τη μορφή:

$$[(x, y) \oplus z, (x', y') \oplus z'] = (0, 0) \oplus (xy' - yx')$$

Η άλγεβρα $\mathfrak{h}_3$ είναι επίσης μηδενοδύναμη, δηλαδή $[\cdot, [\cdot, \cdot]] = 0$. Αυτό μπορεί κανείς να το δει με πράξεις, από την παραπάνω σχέση. Βασική παρατήρηση και συνέπεια αυτού είναι η μορφή της σχέσης Baker-Campbell-Hausdorff, που γίνεται:

$$\exp(tA)\exp(tB) = \exp\left(t(A + B) + \frac{t^2}{2}[A, B]\right)$$

εφόσον $O\big(t^3[A, [A, B]] + t^3[B, [A, B]]\big) = 0$. Αυτή τη σχέση, που αφορά στην πραγματικότητα την ομάδα του Heisenberg, θα την ξαναδούμε αργότερα.

Συνήθως βέβαια κανείς δεν βλέπει την άλγεβρα Lie του Heisenberg με αυτόν τον τρόπο, αλλά χρησιμοποιεί πίνακες. Η ακόλουθη παρατήρηση ουσιαστικά μας δίνει έναν ισοδύναμο τρόπο περιγραφής της ομάδας του Heisenberg, σαν άλγεβρα πινάκων.

**Παρατήρηση 3.1.** *Η άλγεβρα $\mathfrak{h}_3$ είναι ισόμορφη με την άλγεβρα των $3 \times 3$ γνησίως άνω τριγωνικών πινάκων, με αγκύλη Lie τον μεταθέτη. Συγκεκριμένα:*

$$X \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Y \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Z \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Σε αυτήν την περίπτωση, ο προηγούμενος υπολογισμός της αγκύλης Lie γίνεται:*

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x' & z' \\ 0 & 0 & y' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & xy' - x'y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Απόδειξη:* Είναι υπόθεση ρουτίνας, ορίζοντας τη συνάρτηση του ισομορφισμού μέσω τις αντιστοιχίας των $X, Y, Z$ με τους πίνακες.

□

Για την γενική περίπτωση, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

**Ορισμός 3.3** (Η άλγεβρα Lie του Heisenberg)**.** *Η άλγεβρα Lie του Heisenberg $\mathfrak{h}_{2n+1}$ είναι ο χώρος $\mathbb{R}^{2n+1}$, με την αγκύλη Lie:*

$$[X_j, Y_\lambda] = \delta_{j,\lambda} Z, \; [X_j, Z] = [Y_j, Z] = 0$$

*όπου $\{X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n, Z\}$ είναι μία βάση του $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Και πάλι είναι συνήθης η ταύτιση $\mathfrak{h}_{2n+1} = \mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{R}$, λόγω της ιδιομορφίας της τελευταίας συντεταγμένης. Η αγκύλη Lie μπορεί να υπολογιστεί όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση, οπότε βρίσκουμε:

$$[(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) \oplus z, (x'_1, \cdots, x'_n, y'_1, \cdots, y'_n) \oplus z'] = 0 \oplus \left(\sum_{j=1}^{n} x_j y'_j - y_j x'_j\right)$$

Από αυτόν τον υπολογισμό έπεται ότι η $\mathfrak{h}_{2n+1}$ είναι μηδενοδύναμη. Επίσης, όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση, κανείς μπορεί να ταυτίσει την εν λόγω άλγεβρα με την άλγεβρα των $(n+2)\times(n+2)$ πινάκων της μορφής:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n & z \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

με αγκύλη Lie τον μεταθέτη.

### 3.1.2 Η ομάδα Lie του Heisenberg

Κλασικός τρόπος να μεταβεί κανείς από μία άλγεβρα Lie στην αντίστοιχη ομάδα Lie είναι η εκθετική απεικόνιση. Εδώ, δοθείσης της άλγεβρας Lie $\mathfrak{h}_3$, επιθυμούμε να κατασκευάσουμε μία αντίστοιχη ομάδα Lie $H_3$. Προκειμένου να υπάρχει όντως η επιθυμητή αντιστοιχία μεταξύ της άλγεβρας και της ομάδας, αναγκαζόμαστε να χρησιμοποιήσουμε την εκθετική απεικόνιση των πινάκων, όπου εδώ βλέπουμε την $\mathfrak{h}_3$ ως άλγεβρα πινάκων.

Μέσω λοιπόν του εκθετικού παίρνουμε:

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & z+1/2\cdot xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ξεκινώντας από την μία διάσταση, η ομάδα Lie του Heisenberg θα πρέπει να είναι η ομάδα των $3\times 3$ τριγωνικών πινάκων, που στην διαγώνιο έχουν μονάδα. Η πράξη θα πρέπει να δίνεται από τον πολλαπλασιασμό των εκθετικών, και κατά συνέπεια είναι πολλαπλασιασμός πινάκων. Η πράξεις μπορούν να γίνουν είτε με το χέρι, είτε χρησιμοποιώντας τον τύπο των Baker-Campbell-Hausdorff. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, λόγω της μηδενοδυναμίας της άλγεβρας $\mathfrak{h}_3$, κανείς απλοποιεί τον τύπο των Baker-Campbell-Hausdorff και παίρνει:

$$\exp(tA)\exp(tB) = \exp\left(t(A+B) + \frac{t^2}{2}[A,B]\right)$$

ή, για $t=1$:

$$\exp(A)\exp(B) = \exp\left(A+B+\frac{1}{2}[A,B]\right)$$

**Παρατήρηση 3.2.** *Η πράξη που μεταφέρεται μέσω του εκθετικού στην $H_3$ είναι ο ακόλουθος πολλαπλασιασμός πινάκων:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z+1/2\cdot xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x' & z'+1/2\cdot x'y' \\ 0 & 1 & y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x+x' & z+z'+1/2\cdot(xy'-x'y) \\ 0 & 1 & y+y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Για τον υπολογισμό των προηγούμενων εκθετικών, είναι χρήσιμος ο ακόλουθος τύπος:

**Παρατήρηση 3.3.** *Το εκθετικό μπορεί να υπολογιστεί μέσω ορίου ως εξής:*

$$\exp(A) = \lim_{m\to\infty}\left(\mathrm{Id} + \frac{1}{k}X\right)^m$$

*αφού:*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}X^k = \lim_{m\to\infty}\left(\mathrm{Id} + \frac{1}{k}X\right)^m$$

Οπότε, εάν κανείς παρατηρήσει (λόγου χάρη με επαγωγή) ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$:

$$\left[\mathrm{Id} + \frac{1}{m}\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^m = \begin{pmatrix} 1 & x & z + 1/2 \cdot xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

τότε μπορεί να υπολογίσει το εκθετικό:

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & z + 1/2 \cdot xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Παρότι είναι φυσικό κανείς να θέλει να προχωρίσει στην περιγραφή της εν λόγω ομάδας με πίνακες-εκθετικά, είναι ορισμένες φορές βολικότερο να δουλεύουμε με τους εκθέτες των εκθετικών κι όχι με τα εκθετικά αυτά καθαυτά, ενώ παράλληλα μας ενδιαφέρει η δομή της ομάδας $H_3$. Για αυτό λοιπόν, πολλές φορές γίνεται η αντιστοιχία:

$$(x, y) \oplus z \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & x & z + 1/2 \cdot xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Οπότε η ομάδα του Heisenberg έχει στοιχεία πανομοιότυπα με αυτά τις αντίστοιχης άλγεβρας, μόνο που υπάρχει και μία πράξη:

$$(x, y) \oplus z \cdot (x', y') \oplus z' = (x + x', y + y') \oplus \left(z + z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y)\right)$$

**Ορισμός 3.4** (Η ομάδα Lie του Heisenberg στη 1 διάσταση)**.** *Η ομάδα Lie του Heisenberg $H_{2n+1}$ είναι ο χώρος $\mathbb{R}^{2n+1}$, εφοσδιασμένος με τον πολλαπλασιασμό της ομάδας:*

$$(x, y) \oplus z \cdot (x', y') \oplus z' = (x + x', y + y') \oplus \left(z + z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y)\right)$$

Η ανάλυσή μας επιτρέπει, παρόλα αυτά, να βλέπουμε την $H_3$ και ως ομάδα πινάκων (δηλαδή εκθετικών). Όσον αφορά τη γενικότερη περίπτωση, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

**Ορισμός 3.5** (Η ομάδα Lie του Heisenberg)**.** *Η ομάδα του Heisenberg* $H_{2n+1}$ *είναι ο χώρος* $\mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{R}$, *εφοδιασμένος με τον πολλαπλασιασμό:*

$$(x, y) \oplus z \cdot (x', y') \oplus z' = (x + x', y + y') \oplus \left(z + z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y)\right)$$

Φυσικά κανείς μπορεί να εκφράσει την ομάδα $H_{2n+1}$ μέσω πινάκων, με πράξη τον πολλαπλασιασμό των πινάκων.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n & z + 1/2\sum_j x_j y_j \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 3.2 Η αναπαράσταση του Schrödinger

Οι αναπαραστάσεις που μας ενδιαφέρουν στην άλγεβρα του Heisenberg $\mathfrak{h}_3$ είναι αυτές που εμπλέκουν τους βασικούς τελεστές στους οποίους αυτή δομήθηκε, δηλαδή στους τελεστές της θέσης και της ορμής. Η πρώτη αναπαράσταση αυτού του είδους με την οποία κανείς ασχολείται είναι αυτή του Schrödinger.

**Ορισμός 3.6** (Η αναπαράσταση του Schrödinger στην άλγεβρα Lie $\mathfrak{h}_3$)**.** *Η αναπαράσταση του Schrödinger στην άλγεβρα Lie* $\mathfrak{h}_3$ *είναι η απεικόνιση* $R_S : \mathfrak{h}_3 \to \mathfrak{gl}(\mathcal{S}(\mathbb{R})')$ *που ορίζεται από τις σχέσεις:*

$$R_S(X)\Psi = -iQ\Psi,\ R_S(Y)\Psi = -iP\Psi,\ R_S(Z)\Psi = -i\hbar\Psi$$

Η αναπαράσταση του Schrödinger είναι πράγματι αναπαράσταση αλγεβρών Lie, αφού:

$$\begin{aligned} [R_S(X), R_S(Y)]\Psi &= -QP\Psi + PQ\Psi = -i\hbar\Psi = R_S(Z)\Psi = R_S([X,Y])\Psi \\ [R_S(X), R_S(Z)]\Psi &= -Q\Psi + Q\Psi = 0 = R_S([X,Z])\Psi \\ [R_S(Y), R_S(Z)]\Psi &= -P\Psi + P\Psi = 0 = R_S([Y,Z])\Psi \end{aligned}$$

Μερικά σχόλια. Πολλές φορές κανείς θα δει την εν λόγω αναπαράσταση ως αναπαράσταση $R_S : \mathfrak{h}_3 \to \mathfrak{gl}(L^2(\mathbb{R}))$ (για παράδειγμα, στο [21]). Αυτό είναι κάτι που συνηθίζεται ανάμεσα στους φυσικούς. Εμείς χρησιμοποιούμε τις κατανομές, ώστε οι απεικονίσεις $R_S(A)$ να είναι πράγματι από τον $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ στον εαυτό του (στις $L^2-$συναρτήσεις δεν ισχύει κατ' ανάγκη ότι $Q\Psi \in L^2(\mathbb{R})$, για παράδειγμα). Πράγματι, εάν $f \in L^2(\mathbb{R})$, μπορούμε να ορίσουμε το συναρτησοειδές $\int_{\mathbb{R}} xf \cdot \lozenge\ dx$, που αντιστοιχεί στην $xf(x)$. Εκτιμώντας σε ταχέως φθίνουσες συναρτήσεις $\varphi$, παίρνουμε:

$$\left|\int_{\mathbb{R}} xf \cdot \varphi\ dx\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |xf \cdot \varphi|\ dx \overset{\star}{\leqslant} \left(\int_{\mathbb{R}} x\varphi\ dx\right)^{1/2} \cdot ||f||_{L^2} < \infty$$

όπου στην άστρο ($\star$) χρησιμοποιούμε Hölder. Αυτό δείχνει ότι $xf \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ (μέσω της συνήθους εμφύτευσης). Ένας άλλος τρόπος με τον οποίο το πρόβλημα αυτό επιλύεται υπάρχει στο [18]. Έχοντας βέβαια πει αυτά, στη φυσική μερικές φορές οι χώροι $\mathcal{S}$, $L^2$ και $\mathcal{S}'$ ταυτίζονται, πράγμα που ίσως μπερδεύει (στο [21] γίνεται αρκετές φορές αυτή η ταύτιση).

Για λόγους που θα γίνουν σαφείς αργότερα, χρειάζεται να είμαστε σε υποσύνολο του $L^2(\mathbb{R})$, που είναι χώρος Hilbert. Οπότε η προηγούμενη αναπαράσταση μπορεί να περιοριστεί όπου έχει νόημα, σε υποσύνολο του $L^2(\mathbb{R})$, που μάλιστα είναι πυκνό (αφού περιέχει το $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). Για την «περιορισμένη» αυτή αναπαράσταση θα γράφουμε καταχρηστικά $R_S : \mathfrak{h}_3 \to \mathfrak{gl}(L^2(\mathbb{R}))$.

Η αναπαράσταση αυτή είναι στην ουσία μία αναπαράσταση πολλαπλασιασμού και παραγώγισης (αφού η θέση πολλαπλασιάζει και η ορμή παραγωγίζει). Θα δούμε αργότερα, μέσω του θεωρήματος των Stone-von Neumann, ότι εάν ενδιαφερόμαστε για τη θέση και την ορμή, αυτή είναι -κατά μία έννοια- η μοναδική αναπαράσταση.

Παίρνοντας τα εκθετικά, αναμένουμε να πάρουμε μία αναπαράσταση της αντίστοιχης ομάδας Lie $H_3$. Έχουμε λοιπόν μία υποψήφια αναπαράσταση με:

$$\begin{aligned}
\rho_S((a,0)\oplus 0)\Psi(x) &= e^{-iaQ}\Psi(x) = e^{-iax}\Psi(x)\\
\rho_S((0,b)\oplus 0)\Psi(x) &= e^{-ibP}\Psi(x) = e^{b\cdot d/dx}\Psi(x) = \Psi(x-b)\\
\rho_S((0,0)\oplus c)\Psi(x) &= e^{-ic}\Psi(x)
\end{aligned}$$

**Ορισμός 3.7** (Η αναπαράσταση του Schrödinger στην ομάδα Lie $H_3$)**.** *Η αναπαράσταση του Schrödinger στην άλγεβρα Lie $H_3$ είναι η απεικόνιση $\rho_S : H_3 \to \mathrm{GL}\big(L^2(\mathbb{R})\big)$ με τύπο:*

$$\rho_S\big((a,b)\oplus c\big)\Psi(x) = e^{-ic}e^{i\cdot ab/2}e^{-iax}\Psi(x-b)$$

Η αναπαράσταση $\rho_S$ είναι πράγματι αναπαράσταση, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε με υπολογισμό.

$$\begin{aligned}
\rho_S\big((a,b)\oplus c\big)\rho_S\big((a',b')\oplus c'\big)\Psi(x) &= \rho_S\big((a,b)\oplus c\big)e^{-ic'}e^{i\cdot a'b'/2}e^{-ia'x}\Psi(x-b')\\
&= e^{-i(c+c')}e^{i\cdot(a+a')(b+b')/2}e^{-i(a+a')x}\Psi(x-b-b')\\
&= \rho_S\big((a+a',b+b')\oplus(c+c'+1/2\cdot(ab'-a'b))\big)\\
&= \rho_S\big((a,b)\oplus c\cdot(a',b')\oplus c'\big)
\end{aligned}$$

Υπάρχουν φυσικά κι άλλες αναπαραστάσεις της ομάδας του Heisenberg. Μία από αυτές, δίνεται μέσω εναλλαγής της θέσης και της ορμής, δηλαδή μέσω του μετασχηματισμού Fourier (όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο).

$$\widetilde{\rho}_S = \mathcal{F}\rho_S\widehat{\mathcal{F}}$$

Στην πραγματικότητα βέβαια, η διαφορά των αναπαραστάσεων δεν είναι ουσιώδης, αφού κάθε (ανάγωγη) αναπαράσταση που εμπλέκει τις σχέσεις κανονικής μετάθεσης είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμη με την αναπαράσταση του Schrödinger.

Για την παρακάτω πρόταση μπορούν να βρεθούν πληροφορίες στα [12], [13], [21].

**Πρόταση 3.1.** *Η αναπαράσταση $\rho_S : H_3 \to \mathrm{GL}\big(L^2(\mathbb{R})\big)$ του Schrödinger είναι ανάγωγη.*

## 3.3 Θεωρία τελεστών και (συνεχής) φασματική διάσπαση

Παρότι χρειαζόμαστε μόνο μεμονομένα αποτελέσματα της εν λόγω παραγράφου, η θεωρία των τελεστών και της φασματικής διάσπασης (και οι αποδείξεις / ιδέες που την συνοδεύουν) θεωρούμε ότι είναι αρκετά ενδιαφέρουσα ώστε να αναλυθεί, τουλάχιστον εν τάχει. Σημειώνουμε ότι κύριο μέλημά μας είναι η διατύπωση μίας φασματικής διάσπασης, που θα χρησιμοποιηθεί μετέπειτα για να ταυτίσει διάφορους τελεστές με τον τελεστή της ορμής.

### 3.3.1 Η κλασική μορφή του φασματικού θεωρήματος σε αυτοσυζυγείς τελεστές

Παρότι θεωρούμε αρκετά πράγματα δεδομένα σχετικά με τους τελεστές, θα κάνουμε μερικές βασικές υπενθυμίσεις προκειμένου να προχωρίσουμε στη φασματική διάσπαση. Πολύ καλά, κατά τη γνώμη μου, βιβλία που περιέχουν θεωρία τελεστών είναι το [5][1] και, για θέματα που σχετίζονται περισσότερο με φυσική, το [14].

**Σε όλα τα παρακάτω, ο $\mathcal{H}$ θα θεωρείται διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.** Δεν χρειάζεται για όλες τις διατυπώσεις, είναι όμως μεγάλη ευκολία. Εξάλλου, εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με τέτοιους χώρους.

Όπως θα έχει γίνει ήδη σαφές, καίριας σημασίας είναι οι γραμμικοί τελεστές και οι αυτοσυζυγείς τελεστές (δηλαδή οι τελεστές για τους οποίους $(y, Ax) = (Ay, x)$ για $x, y \in \mathcal{H}$). Ο συμβολισμός που χρησιμοποιούμε για τον (ασθενώς ορισμένο) συζυγή τελεστή είναι το $A^*$, οπότε ένας τελεστής είναι αυτοσυζυγής εάν $A = A^*$.

Σημειώνουμε επίσης ότι, στην πραγματικότητα, η έννοιες των φραγμένων και συνεχών τελεστών ταυτίζονται. Ένας τελεστής $T : (X, ||\cdot||) \to (Y, |||\cdot|||)$ ονομάζεται φραγμένος εάν:

$$||T|| = \inf\left\{M > 0 \;\middle|\; \forall x \in X,\ |||T(x)||| \leqslant M \cdot ||x||\right\} < \infty$$

Δεν είναι δύσκολο κανείς να παρατηρήσει (με τις δύο ανισότητες) ότι ο προηγούμενος ορισμός είναι στην πραγματικότητα ισοδύναμος με τον ακόλουθο:

$$||T|| = \sup\left\{|||T(x)||| \;\middle|\; x \in X,\ ||x|| = 1\right\} = \sup T\big(\partial S(0,1)\big) < \infty$$

Το σύνολο των γραμμικών φραγμένων τελεστών το συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(X, Y)$. Ειδικά εάν $Y = X$, γράφουμε $\mathcal{B}(X)$.

**Παρατήρηση 3.4.** *Οι έννοιες του γραμμικού φραγμένου τελεστή και του γραμμικού συνεχούς τελεστή ταυτίζονται. Με άλλα λόγια:*

$$CL(X, Y) = C(X, Y) \cap L(X, Y) = \mathcal{B}(X, Y)$$

[1]Υπάρχουν διαθέσιμες διαδικτυακά (users.uoa.gr/∼akatavol/) και αντίστοιχες μεταπτυχιακές σημειώσεις.

*Απόδειξη:* Εάν ένας τελεστής είναι φραγμένος, είναι στην πραγματικότητα Lipschitz συνεχής. Από την άλλη, εάν είναι συνεχής, θα πρέπει να είναι συνεχής στη σφαίρα (οπότε από τον ισοδύναμο ορισμό του φράγματος, παίρνουμε το ζητούμενο).

□

Συνηθίζεται να ασχολούμαστε περισσότερο με τους τελεστές ως φραγμένους παρά ως συνεχείς. Ένα φυσιολογικό πόρισμα συνέχειας είναι η ακόλουθη πρόταση:

**Πρόταση 3.2.** *Έστω $T : (D, ||\cdot||) \subseteq (X, ||\cdot||) \to (Y, |||\cdot|||)$ ένας γραμμικός συνεχής τελεστής, ορισμένος στο πυκνό σύνολο $D \subseteq X$, και $(Y, |||\cdot|||)$ πλήρης χώρος. Υπάρχει μοναδική συνεχής επέκταση $\widetilde{T}$ του τελεστή $T$ σε ολόκληρο το $X$, και μάλιστα διατηρεί τη νόρμα του τελεστή $||\widetilde{T}|| = ||T||$.*

*Απόδειξη:* Είναι φυσιολογικό κανείς να θέλει να ασχοληθεί με όρια μέσω του τελεστή, λόγω της πυκνότητας του $D$. Εάν λοιπόν $x \in X$ και $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία του $D$ που το προσεγγίζει, για κάθε $m, n$:

$$|||T(x_n) - T(x_m)||| \leqslant ||T|| \cdot ||x_n - x_m||$$

πράγμα που δείχνει ότι η ακολουθία των εικόνων είναι βασική. Από την πληρότητα του χώρου, έχει νόημα να γράψουμε:

$$\widetilde{T}(x) = \lim_{x_n \to x}{}^{||\cdot||} T(x_n)$$

Ο παραπάνω ορισμός είναι καλός, αφού δεν εξαρτάται από την συγκεκριμένη επιλογή της ακολουθίας. Εάν υπήρχε κι άλλη ακολουθία $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, ο ίδιος τύπος που μας δίνει τη βασική ακολουθία των εικόνων εξασφαλίζει και τη μοναδικότητα του ορίου. Εν τω μεταξύ, αυτό το επιχείρημα μας δείχνει ότι ο τελεστής που τώρα ορίζουμε πρέπει αναγκαστικά να είναι μοναδικός.

Όσον αφορά το φράγμα (δηλαδή τη συνέχεια), έχουμε:

$$|||T(x_n)||| \leqslant ||T|| \cdot ||x_n||, \text{ δηλαδή με όριο } |||\widehat{T}(x)||| \leqslant ||T|| \cdot ||x|| \Rightarrow ||\widetilde{T}|| \leqslant ||T||$$

Ισχύει και η άλλη ανισότητα $||\widetilde{T}|| \geqslant ||T||$, αφού:

$$||\widetilde{T}|| = \sup T\big(\partial S_X(0,1)\big) \geqslant \sup T\big(\partial S_D(0,1)\big) = ||T||$$

□

Έστω $A$ ένας τελεστής. Εάν κανείς ανατρέξει στη γραμμική άλγεβρα και τη διαγωνοποίηση των τελεστών, θα βρει μία στενή σχέση μεταξύ των ιδιοχώρων των γραμμικών απεικονίσεων και της διαγωνοποιημένης μορφής. Την κατάσταση αυτή των ιδιοχώρων θέλουμε να τη μεταφέρουμε και στη γενική θεωρία τελεστών, προκειμένου να μπορούμε να διατυπώσουμε μία μορφή του φασματικού θεωρήματος. Κανείς λοιπόν ξεκινά με το φάσμα ενός τελεστή και τις φασματικές ακολουθίες.

Όσον αφορά το φάσμα, στη γραμμική άλγεβρα θέλουμε να ισχύει ο τύπος $(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})v = 0$. Στους τελεστές, δεδομένης μίας ιδιοτιμής $\lambda$, ο τελεστής $A - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ κανείς θα ήθελε να γίνεται μηδενικός. Αυτό όμως, σε χώρους απειροδιάστατους, δεν είναι βοηθητικό καθώς υπάρχουν τελεστές χωρίς ιδιοτιμές. Παράδειγμα είναι ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $L_f : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$, $L_f g = fg$. Καλύτερη διατύπωση λοιπόν είναι η ακόλουθη:

**Ορισμός 3.8** (Το φάσμα ενός τελεστή)**.** *Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, δηλαδή ένας φραγμένος τελεστής. Το φάσμα του $A$ ορίζεται ως το σύνολο:*

$$\mathrm{spec}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda \cdot \mathrm{Id} \text{ δεν έχει φραγμένη αντίστροφο}\}$$

Το φάσμα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή είναι στην πραγματικότητα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, κατ' αναλογία με το γεγονός ότι οι ιδιοτιμές ενός αυτοσυζυγούς πίνακα είναι πραγματικές. Χρειάζεται βέβαια λίγη δουλειά ώστε αυτό να αποδειχθεί, λόγω των (εν γένει) άπειρων διαστάσεων.

**Λήμμα 3.1.** *Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Έχουμε τότε ότι:*

$$A(\mathcal{H})^{\perp} = \ker(A^*)$$

*Απόδειξη:* Εάν $v \in A(\mathcal{H})^{\perp}$, τότε:

$$0 = (v, Au) = (A^*v, u), \ u \in \mathcal{H}$$

δηλαδή $v \in \ker(A^*)$. Από την άλλη, εάν $v \in \ker(A^*)$, τότε για κάθε $u \in \mathcal{H}$ η προηγούμενη ισότητα ισχύει, το οποίο δείχνει ότι το $v$ είναι ορθογώνιο σε κάθε $Au \in A(\mathcal{H})$.

□

**Λήμμα 3.2.** *Εάν ο τελεστής $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι αυτοσυζυγής, τότε για κάθε $\lambda = a + ib$ έχουμε:*

$$\big((A - \lambda \cdot \mathrm{Id})u, (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})u\big) \geqslant b^2(u, u), \ u \in \mathcal{H}$$

*Απόδειξη:* Έχουμε:

$$\begin{aligned}\big((A - \lambda \cdot \mathrm{Id})u, (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})u\big) &= \big((A - a \cdot \mathrm{Id})u, (A - a \cdot \mathrm{Id})u\big) + ib\big(u, (A - a \cdot \mathrm{Id})u\big) \\ &\quad - ib\big((A - a \cdot \mathrm{Id})u, u\big) + b^2(u, u)\end{aligned}$$

Λόγω αυτοσυζυγίας οι ενδιάμεσοι όροι εξαλείφονται, και παίρνουμε:

$$\big((A - \lambda \cdot \mathrm{Id})u, (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})u\big) = \big((A - a \cdot \mathrm{Id})u, (A - a \cdot \mathrm{Id})u\big) + b^2(u, u)$$

□

**Πρόταση 3.3.** *Εάν ο τελεστής $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι αυτοσυζυγής, τότε* $\mathrm{spec}(A) \subseteq \mathbb{R}$.

*Απόδειξη:* Θα δείξουμε ότι εάν $\lambda = a + ib \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, τότε η $A - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ είναι αντιστρέψιμη και φραγμένη. Εφόσον $b \neq 0$, το Λήμμα 3.2 δίνει ότι η $A - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ είναι αντιστρέψιμη.

Από το Λήμμα 3.1, έχουμε $(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})(\mathcal{H})^{\perp} = \ker(A - \overline{\lambda} \cdot \mathrm{Id}) = \{0\}$, δηλαδή το $(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})(\mathcal{H})$ είναι πυκνό στο $\mathcal{H}$. Μπορούμε να δείξουμε ότι είναι όλο το $\mathcal{H}$, επεκτείνοντας γραμμικά από το πυκνό σύνολο. Αυτά δείχνουν ότι ο $A - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ είναι $1 - 1$ και επί. Η αντίστροφη είναι συνεχής, εάν κανείς λάβει υπόψη το Λήμμα 3.2.

□

Όσον αφορά τις φασματικές ακολουθίες, οι ιδιότητες που θα πρέπει να τις χαρακτηρίζουν είναι οι ακόλουθες. Εφόσον δεν μπορούμε να βρούμε ακριβείς ιδιοτιμές των απειροδιάστατων τελεστών, ίσως να μπορούμε να δουλέψουμε προσεγγιστικά. Δεδομένου ενός Borel μετρήσιμου συνόλου $E \subseteq \mathbb{R}$, θέλουμε μία αντιστοιχία του $E$ (η γενικευμένη ιδιοτιμή) με έναν γραμμικό χώρο $V_E$ (τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα). Πρέπει λοιπόν:

i. Για κάθε τέτοιο $E$, ο $V_E$ πρέπει να είναι $A-$αναλλοίωτος.

ii. Εάν $E \subseteq [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$ και $v \in V_E$, τότε:

$$||(A - \lambda_0 \cdot \mathrm{Id})v|| \leqslant \varepsilon ||v||$$

iii. $V_{\mathrm{spec}(A)} = \mathcal{H}$ και $V_\emptyset = \{0\}$, αφού θέλουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα να «παράγουν» τον $\mathcal{H}$.

iv. Εάν τα $E, F$ είναι ξένα, τότε $V_E \perp V_F$.

v. Για κάθε $E, F$ έχουμε $V_{E\cap F} = V_E \cap V_F$.

vi. Εάν η οικογένεια $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ περιέχει ξένα ανά δύο σύνολα, τότε:

$$V_{\bigcup_j E_j} = \bigoplus_{j=1}^\infty V_{E_j}$$

**Ορισμός 3.9** (Φασματικές ακολουθίες)**.** *Δεδομένου ενός τελεστή $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, μία ακολουθία $\{V_E\}_E$ με τις ιδιότητες i.-vi., όπου τα $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμα, καλείται φασματική ακολουθία.*

Καθοριστικής σημασίας για τη φασματική διάσπαση, και μάλιστα ακόμη και για τη διατύπωσή της, είναι τα προβολικά μέτρα. Τα προβολικά μέτρα είναι ένας βολικός τρόπος να περιγραφούν οι κλειστοί υπόχωροι των χώρων Hilbert.

Σημειώνουμε ότι, δεδομένου ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$, κι ενός κλειστού υποχώρου του $V$, υπάρχει η ορθογώνια διάσπαση $\mathcal{H} = V \oplus V^\perp$, κι επίσης μοναδικός προβολικός τελεστής / ορθογώνια προβολή $P$ με $P(v + v^\perp) = v$. Από τον ορισμό του, ο τελεστής αυτός ικανοποιεί τις $P^2 = 0$ και είναι αυτοσυζυγής, δηλαδή $P = P^*$.

**Ορισμός 3.10.** *Έστω $(X, \mathcal{M})$ ένας μετρήσιμος χώρος. Μία απεικόνιση $\mathscr{P} : \mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, όπου ο $\mathcal{H}$ είναι χώρος Hilbert, θα καλείται προβολικό μέτρο εάν:*

*i. Για κάθε $E \in \mathcal{M}$, η $\mathscr{P}(E)$ είναι ορθογώνια προβολή.*

*ii. Ισχύουν $\mathscr{P}(\emptyset) = 0$ και $\mathscr{P}(X) = \mathrm{Id}$.*

*iii. Εάν η οικογένεια $\{E_j\}_{j=1}^\infty \subseteq \mathcal{M}$ περιέχει ξένα ανά δύο σύνολα, τότε για κάθε $v \in \mathcal{H}$:*

$$\mathscr{P}\left(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\right) v = \sum_{j=1}^\infty \mathscr{P}(E_j) v$$

Κανείς θα έλεγε ότι όλη η ιδέα του φασματικού θεωρήματος βρίσκεται στα προβολικά μέτρα: Δοθέντος ενός αυτοσυζυγούς τελεστή $A$, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να βρούμε κατάλληλο προβολικό μέτρο $\mathscr{P}^A$ ώστε να έχει νόημα κάποιας μορφής αντιστοιχία του $A$ με το $\mathscr{P}^A$. Το προβολικό μέτρο $\mathscr{P}^A(E)$ είναι στην ουσία μία προβολή στο στοιχείο $V_E$ της φασματικής ακολουθίας που αντιστοιχεί στο $E$.

Δοθέντος ενός προβολικού μέτρου $\mathscr{P}$, για κάθε $v \in \mathcal{H}$ μπορούμε να ορίσουμε το μέτρο:

$$\mathscr{P}_v(E) = \big(v, \mathscr{P}(E)v\big), \text{ με } E \in \mathcal{M}$$

Μέσω αυτού του μέτρου είναι δυνατή μία «ολοκλήρωση προς τελεστές».

Πριν αναφέρουμε την πρόταση, χρειαζόμαστε μερικά λήμματα. Ορίζουμε για αρχή την έννοια των τετραγωνικών μορφών, δηλαδή των απεικονίσεων $Q : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ με τις ιδιότητες:

i. Για $\lambda \in \mathbb{C}$ και $v \in \mathcal{H}$, έχουμε $Q(\lambda v) = |\lambda|^2 Q(v)$.

ii. Η απεικόνιση:

$$L(u,v) = \frac{1}{2}\big(Q(u+v) - Q(u) - Q(v)\big) - \frac{i}{2}\big(Q(u+iv) - Q(u) - Q(iv)\big)$$

είναι μία γραμμική-συζυγώς γραμμική μορφή (γραμμική στην πρώτη, συζυγώς γραμμική στη δεύτερη συντεταγμένη).

Στην περίπτωση όπου $||Q(v)|| \leqslant C \cdot ||v||^2$, θα λέμε ότι η $Q$ είναι φραγμένη.

**Λήμμα 3.3.** *Εάν $Q$ είναι μία τετραγωνική μορφή στο $\mathcal{H}$ και $L$ η αντίστοιχη γραμμική-συζυγώς γραμμική μορφή, τότε τα ακόλουθα ισχύουν:*

*i. Για κάθε $v \in \mathcal{H}$, έχουμε $Q(v) = L(v,v)$.*

*ii. Εάν η $Q$ είναι φραγμένη, η $L$ είναι επίσης.*

*iii. Εάν $Q(v) \in \mathbb{R}$ για κάθε $v \in \mathcal{H}$, τότε $L(u,v) = \overline{L(v,u)}$ για κάθε $u, v \in \mathcal{H}$*

*Απόδειξη:* Το i. μπορεί να αποδειχθεί με υπολογισμό, παίρνοντας $u = v$ στον ορισμό του $L$.

Όσον αφορά το ii., γράφουμε $Q(v) \leqslant C \cdot ||v||^2$ και υποτέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $||u|| = ||v|| = 1$. Από τον τύπο της $L$ έπεται:

$$|L(u,v)| \leqslant \frac{C}{2}(4+1+1+4+1+1) = 6C$$

πράγμα που δείχνει ότι η $L$ είναι φραγμένη.

Για το iii., Θεωρούμε το πραγματικός μέρος:

$$R(u,v) = \Re L(u,v) = \frac{1}{2}\big(Q(u+v) - Q(u) - Q(v)\big)$$

το οποίο είναι διγραμμικό και συμμετρικό, με $R(iu, iv) = R(u,v)$. Λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις ιδιότητες, έχουμε $R(u, iv) = -R(v, iu)$ και:

$$L(u,v) = R(u,v) - iR(u,iv) = R(v,u) + iR(v,iu) = \overline{L(v,u)}$$

□

**Λήμμα 3.4.** *Εάν $Q$ είναι μία φραγμένη τετραγωνική μορφή στο $\mathcal{H}$, υπάρχει μοναδικός φραγμένος τελεστής $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ με:*

$$Q(v) = (v, Av), \; v \in \mathcal{H}$$

*Εάν η $Q$ παίρνει μόνο πραγματικές τιμές, τότε ο τελεστής $A$ είναι αυτοσυζυγής.*

*Απόδειξη:* Εφόσον ο $Q$ είναι φραγμένος, από το προηγούμενο λήμμα ο αντίστοιχος $L$ είναι επίσης φραγμένος. Δηλαδή, υπάρχει σταθερά $C > 0$ ούτως ώστε:

$$|L(u,v)| \leqslant C \cdot ||u|| \cdot ||v||,\ u,v \in \mathcal{H}$$

Σταθεροποιώντας λοιπόν την $u$, παίρνουμε ένα φραγμένο συναρτησοειδές $L(u,\Diamond)$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, μπορεί να βρεθεί $w_u \in \mathcal{H}$ με $||w_u|| \leqslant C \cdot ||u||$, ούτως ώστε:

$$L(u,\Diamond) = (w_u,\Diamond)$$

Μέσω αυτού του $w_u$, μπορεί να οριστεί τελεστής $Bu = w_u$, ο οποίος είναι γραμμικός και φραγμένος (αφού $||w_u|| \leqslant C \cdot ||u||$). Εάν λοιπόν ορίσουμε $A = B^*$, θα έχουμε τη ζητούμενη σχέση.

Όσον αφορά τη μοναδικότητα, εάν υπήρχε κι άλλος τελεστής $\Gamma$, τότε $(v,(A-\Gamma)v) = 0$, δηλαδή $A = \Gamma$.

Εάν η $Q$ παίρνει μόνο θετικές τιμές, από το προηγούμενο λήμμα:

$$L(u,v) = \overline{L(v,u)}$$

δηλαδή:

$$(u,Av) = L(u,v) = \overline{L(v,u)} = \overline{(v,Au)} = (Au,v)$$

Άρα ο $A$ είναι αυτοσυζυγής.

□

**Πρόταση 3.4** (Ολοκλήρωση προς τελεστές). *Έστω $(X,\mathcal{M})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $\mathscr{P} : \mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ένα προβολικό μέτρο. Υπάρχει μία γραμμική απεικόνιση $T$, που τη συμβολίζουμε καταχρηστικά με $\int_X \Diamond\, d\mathscr{P}$, που στέλνει φραγμένες $\mathcal{M}-$μετρήσιμες συναρτήσεις σε στοιχεία του $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Επίσης:*

$$(v,Tfv) = \left(v, \left(\int_X f\, d\mathscr{P}\right) v\right) = \int_X f\, d\mathscr{P}_v$$

*και ισχύουν οι ιδιότητες:*

*i. Για κάθε $E \in \mathcal{M}$:*

$$\int_X \chi_E\, d\mathscr{P} = \mathscr{P}(E)$$

*ii. Για κάθε $f$ έχουμε:*

$$||Tf|| = \left|\left|\int_X f\, d\mathscr{P}\right|\right| \leqslant \sup_{\lambda \in X} |f(\lambda)|$$

*iii. Ισχύει ο πολλαπλασιαστικός κανόνας:*

$$\int_X fg\, d\mathscr{P} = \left(\int_X f\, d\mathscr{P}\right)\left(\int_X g\, d\mathscr{P}\right)$$

*iv. Για κάθε $E,F \in \mathcal{M}$, έχουμε $\mathscr{P}(E \cap F) = \mathscr{P}(E)\mathscr{P}(F)$.*

...

*iv. Για κάθε $f$ έχουμε:*

$$\int_X \overline{f}\ d\mathscr{P} = \left(\int_X f\ d\mathscr{P}\right)^*$$

*Ειδικότερα ο εν λόγω τελεστής είναι αυτοσυζυγής εάν η $f$ παίρνει μόνο πραγματικές τιμές.*

Λίγα σχόλια πριν την απόδειξη. Η ολοκλήρωση προς τελεστές είναι ένας τρόπος να γίνει μία σύνδεση των προβολικών μέτρων με τα κανονικά μέτρα. Εξάλλου στη διακριτή περίπτωση κανείς θα μπορούσε κατ' αναλογία να γράψει σε διαγωνοποιημένη μορφή $A = \bigoplus_k \lambda_k P_k$, όπου $P_k$ είναι προβολές. Η ορολογία «ολοκλήρωση» σαφώς προέρχεται από τις ιδιότητες του εν λόγω τελεστή $T(\Diamond) = \int_X \Diamond\ d\mathscr{P}$, και ειδικότερα των **i.** και **ii.** Από την **ii.**, χρησιμοποιώντας την **i.**, μπορούμε με κατάλληλες προσεγγίσεις (μέσω απλών συναρτήσεων) να περάσουμε στον υπολογισμό του $\int_X f\ d\mathscr{P}$ τυχούσας (φραγμένης) $f$. Ο πολλαπλασιαστικός κανόνας είναι κι αυτός λογικός, λόγω της τέταρτης ιδιότητας των προβολικών μέτρων.

*Απόδειξη:* Έστω $\mathscr{P}$ ένα προβολικό μέτρο και $f$ μία $\mathcal{M}-$μετρήσιμη, φραγμένη συνάρτηση. Ορίζουμε:

$$Q_f(v) = \int_X f\ d\mathscr{P}_v$$

και ισχυριζόμαστε ότι η $Q_f$ είναι φραγμένη τετραγωνική μορφή. Πράγματι, εάν η $f$ είναι δείκτρια, τότε:

$$Q_f(v) = (v, \mathscr{P}(E)v)$$

η οποία είναι φραγμένη τετραγωνική μορφή. Το αποτέλεσμα περνάει άμεσα στις απλές συναρτήσεις, και με προσέγγιση σε κάθε μετρήσιμη φραγμένη συνάρτηση, αφού μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$|Q_f(v)| \leqslant \left(\sup_{\lambda \in X} |f(\lambda)|\right) \cdot ||v||^2$$

Από το Λήμμα 3.4, υπάρχει μοναδικός φραγμένος τελεστής $A_f$ με:

$$Q_f(v) = (v, A_f v)$$

κι οπότε είναι λογικό να ορίσουμε:

$$Tf = \int_X f\ d\mathscr{P} = A_f$$

Ο τελεστής $T(\Diamond) = \int_X \Diamond\ d\mathscr{P}$ είναι καλά ορισμένος και μοναδικός, λόγω της μοναδικότητας του Λήμματος 3.4.

Όσον αφορά τις ιδιότητες του εν λόγω τελεστή, δεν είναι δύσκολο να επαληθευτούν. Σημειώνουμε μόνο τις ιδιότητες **iii.**, **iv.** Για την **iii.**, εάν οι $f, g$ είναι δείκτριες συναρτήσεις $\chi_E, \chi_F$, τότε:

$$\left(\int_X f\ d\mathscr{P}\right)\left(\int_X g\ d\mathscr{P}\right) = \mathscr{P}(E)\mathscr{P}(F) = \mathscr{P}(E \cap F) = \int_X fg\ d\mathscr{P}$$

Η ιδιότητα περνάει σε όλες τις φραγμένες μετρήσιμες συναρτήσεις, με προσέγγιση. Για την **iv.**, εάν η $f$ παίρνει μόνο πραγματικές τιμές, τότε από το Λήμμα 3.4 ο $\int_X f\ d\mathscr{P}$

είναι αυτοσυζυγής. Εάν δεν είναι, μπορούμε να διασπάσουμε την $f$ στο πραγματικό και μιγαδικό της μέρος, και να πάρουμε την **iv.** μέσω γραμμικότητας, λαμβάνοντας υπόψη την ειδική περίπτωση των αμειγώς πραγματικών τιμών.

$\square$

Με όλα αυτά είμαστε πλέον σε θέση να διατυπώσουμε το κλασικό φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές. Δεν θα δώσουμε την απόδειξη, αλλά παραπέμπουμε στο [14].

**Θεώρημα 3.1** (Φασματική διάσπαση - κλασική εκδοχή)**.** *Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ένας αυτοσυζυγής τελεστής. Υπάρχει προβολικό μέτρο $\mathscr{P}^A$ στη Borel $\sigma-$άλγεβρα του $\operatorname{spec}(A)$, ούτως ώστε:*

$$A = \int_{\operatorname{spec}(A)} \lambda \, d\mathscr{P}^A(\lambda)$$

### 3.3.2 Η εναλλακτική μορφή του φασματικού θεωρήματος σε αυτοσυζυγείς τελεστές

Μία άλλη μορφή του φασματικού θεωρήματος βασίζεται στην έννοια του ευθέος ολοκληρώματος, που ουσιαστικά διαχωρίζει τον χώρο $\mathcal{H}$ στους αντίστοιχους γενικευμένους ιδιοχώρους. Σε αντίθεση με τις φασματικές ακολουθίες, αυτή η μορφή δεν είναι «διακριτή», αλλά εμφανίζει μία μορφή συνέχειας. Οι λεπτομέρειες αυτών των ισχυρισμών θα εξακριβωθούν με τους επόμενους ορισμούς.

Δεδομένου ενός χώρου μέτρου $(X, \mathcal{M}, \mathscr{M})$, ενδιαφερόμαστε για τη μελέτη χώρων που μοιάζουν με ιδιόχωρους, δηλαδή χώρους Hilbert, έστω $\mathcal{H}_\lambda$, που εξαρτώνται από τα $\lambda \in X$. Ένας τελεστής σε διαγωνοποιημένη μορφή θα εξαρτάται από τους αντίστοιχους ιδιοχώρους, και μάλιστα για τον υπολογισμό του κανείς χρειάζεται κάποια ευελιξία στην διαχείρισή τους. Περνώντας από τους διάφορους χώρους αυτούς, καθώς $\lambda \in X$, κανείς κατασκευάζει τις λεγόμενες τομές $s$, δηλαδή τις συναρτήσεις με $s(\lambda) \in \mathcal{H}_\lambda$.

Χρειάζεται επίσης η κατασκευή μίας στοιχειώδους γεωμετρίας, δηλαδή η κατασκευή των συναρτήσεων του εσωτερικού γινομένου και της νόρμας:

$$(s_1, s_2) = \int_X \big(s_1(\lambda), s_2(\lambda)\big)_{\mathcal{H}_\lambda} \, d\mathscr{M}(\lambda) \text{ και } ||s||^2 = (s, s)$$

Γι' αυτόν τον λόγο χρειάζεται η εύρεση ενός κατάλληλου μέτρου. Η ιδιομορφία εδώ είναι σημαντική, διότι καθώς τα $\lambda \in X$ μεταβάλλονται, οι χώροι στους οποίους οι $s(\lambda)$ ανήκουν μεταβάλλονται κι αυτοί. Κατά συνέπεια, πρέπει να γίνει κάποια προετοιμασία προκειμένου να μπορεί να οριστεί κατάλληλα κάποια έννοια μετρησιμότητας. Συνηθίζεται το πρόβλημα αυτό να επιλύεται με μία έννοια κοινής ορθοκανονικής βάσης των χώρων $\mathcal{H}_\lambda$. Στο παρόν πλαίσιο, επειδή οι χώροι $\mathcal{H}_\lambda$ έχουν εν γένει διαφορετική διάσταση, λέμε ότι μία οικογένεια $\{e_k\}_k$ αποτελεί ορθοκανονική βάση για τον $\mathcal{H}_\lambda$ εάν:

$$(e_k, e_\ell) = 0 \text{ όταν } i \neq j \text{ και } ||e_k||_{\mathcal{H}_\lambda} \in \{0, 1\} \text{ και } \overline{\operatorname{span}}\{e_k\}_k = \mathcal{H}_\lambda$$

Η έννοια λοιπόν της κοινής ορθοκανονικής βάσης ορίζεται μέσω συναρτήσεων $\{e_k(\lambda)\}_k$, οι οποίες για κάθε $\lambda \in X$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}_\lambda$. Λέμε επίσης ότι έχουμε μετρησιμότητα εάν η συνάρτηση του $\lambda$, $\dim \mathcal{H}_\lambda$, είναι μετρήσιμη, και οι $\big(e_k(\lambda), e_\ell(\lambda)\big)_{\mathcal{H}_\lambda}$ είναι μετρήσιμες. Μία τομή $s$ είναι μετρήσιμη εάν οι:

$$\lambda \mapsto \big(e_k(\lambda), s(\lambda)\big)_{\mathcal{H}_\lambda}$$

είναι μετρήσιμες.

**Ορισμός 3.11** (Ευθύ ολοκλήρωμα). *Έστω $(X, \mathcal{M}, \mathscr{M})$ ένας χώρος μέτρου και μία οικογένεια διαχωρίσιμων χώρων Hilbert $\{\mathcal{H}_\lambda\}_{\lambda \in X}$. Ορίζουμε το ευθύ ολοκλήρωμα:*

$$\int_X^{\oplus} \mathcal{H}_\lambda \, d\mathscr{M}(\lambda)$$

*ως το σύνολο όλων των $\mathcal{M}-$μετρήσιμων τομών $s$, για τις οποίες:*

$$||s||^2 = (s, s) = \int_X \big(s(\lambda), s(\lambda)\big)_{\mathcal{H}_\lambda} \, d\mathscr{M}(\lambda) < \infty$$

Έχοντας την έννοια του ευθέος ολοκληρώματος, μπορούμε να διατυπώσουμε την εναλλακτική μορφή του φασματικού θεωρήματος. Η απόδειξή του μπορεί να βρεθεί στο [14].

**Θεώρημα 3.2** (Φασματική διάσπαση - εναλλακτική εκδοχή). *Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ένας αυτοσυζυγής τελεστής. Υπάρχει $\sigma-$πεπερασμένο μέτρο $\mathscr{M}$ στο φάσμα $\operatorname{spec}(A)$, ένα ευθύ ολοκλήρωμα:*

$$\int_{\operatorname{spec}(A)}^{\oplus} \mathcal{H}_\lambda \, d\mathscr{M}(\lambda)$$

*κι ένας ορθομοναδιαίος τελεστής $U : \mathcal{H} \to \int_{\operatorname{spec}(A)}^{\oplus} \mathcal{H}_\lambda \, d\mathscr{M}(\lambda)$, ούτως ώστε:*

$$\big(UAU^{-1}(s)\big)(\lambda) = \lambda s(\lambda), \text{ για κάθε } s \in \int_{\operatorname{spec}(A)}^{\oplus} \mathcal{H}_\lambda \, d\mathscr{M}(\lambda)$$

### 3.3.3 Οι δύο μορφές του θεωρήματος για μη-φραγμένους αυτοσυζυγείς τελεστές

Η αυτοσυζυγία στους τελεστές που δεν είναι φραγμένοι, αν και κάτι στο οποίο δεν έχουμε αναφερθεί, δεν είναι τετριμμένη υπόθεση. Στην περίπτωση ενός φραγμένου τελεστή $A$, λέμε ότι ο συζυγής τελεστής είναι αυτός που ικανοποιεί τη σχέση:

$$(u, Av) = (A^* u, v), \; u, v \in \mathcal{H}$$

και βρίσκουμε αυτόν τον τελεστή $A^*$ μέσω του θεωρήματος αναπαράστασης του Riesz. Εάν έχουμε:

$$(u, A\Diamond) = (u_A, \Diamond)$$

τότε μπορούμε να ορίσουμε $A^* u = u_A$.

Στην μη-φραγμένη περίπτωση δεν μπορεί να ακολουθηθεί παρόμοια διαδικασία, εκτός κι αν κανείς περιοριστεί σε σύνολο στο οποίο εξασφαλίζεται συνέχεια. Εν γένει λοιπόν, στους μη-φραγμένους τελεστές κανείς περιμένει ότι, εάν ικανοποιείται κάποια υπόθεση αυτοσυζυγίας (ή καλύτερα συμμετρίας), τότε $\operatorname{dom}(A^*) \supseteq \operatorname{dom}(A)$, όπου με $\operatorname{dom}$ συμβολίζουμε το πεδίο ορισμού.

Ορίζουμε ως πρώτο βήμα τους συμμετρικούς τελεστές. Σημειώνουμε ότι, από εδώ και στο εξής, η έννοια του μη-φραγμένου τελεστή θα ταυτίζεται με αυτήν του όχι αναγκαστικά φραγμένου (αυτό συνηθίζεται εξάλλου στη βιβλιογραφία).

**Ορισμός 3.12** (Συμμετρικοί τελεστές)**.** *Ένας μη-φραγμένος τελεστής $A$ στο $\mathcal{H}$ θα καλείται συμμετρικός εάν:*

$$(u, Av) = (Au, v)$$

*για κάθε* $u, v \in \mathrm{dom}(A)$.

**Παρατήρηση 3.5.** *Έστω $A$ ένας μη-φραγμένος τελεστής στο $\mathcal{H}$. Ο $A$ είναι συμμετρικός εάν και μόνο αν ο τελεστής $A^*$ (που δεν ορίζεται εν γένει παντού) αποτελεί επέκταση του $A$, δηλαδή $\mathrm{dom}(A^*) \supseteq \mathrm{dom}(A)$ και $A = A^*$ στο κοινό πεδίο ορισμού τους.*

*Απόδειξη:* ($\Rightarrow$) Εάν ο $A$ είναι συμμετρικός, τότε από την Cauchy-Schwarz έχουμε:

$$|(u, Av)| \leqslant ||Au|| \cdot ||v||$$

και κατά συνέπεια $u \in \mathrm{dom}(A^*)$. Αυτό δείχνει τον εγκλεισμό $\mathrm{dom}(A^*) \supseteq \mathrm{dom}(A)$, και η ιδιότητα της επέκτασης είναι άμεση.

($\Leftarrow$) Για την άλλη κατεύθυνση, εάν ο $A^*$ είναι επέκταση του $A$, τότε εξ ορισμού έχουμε τη συμμετρία.

□

Η Παρατήρηση 3.5 οδηγεί με φυσικό τρόπο στον ακόλουθο ορισμό:

**Ορισμός 3.13** (Αυτοσυζυγείς τελεστές)**.** *Ένας μη-φραγμένος τελεστής $A$ στο $\mathcal{H}$ λέγεται αυτοσυζυγής εάν είναι συμμετρικός κι επιπλέον:*

$$\mathrm{dom}(A) = \mathrm{dom}(A^*)$$

Κανείς μπορεί να πει πολλά πράγματα για αυτές τις έννοιες αυτοσυζυγίας στους μη-φραγμένους τελεστές, εμείς όμως δεν θα ασχοληθούμε με αυτά. Σε κάθε περίπτωση, η σωστή ανάλυση γίνεται στο [14].

Δοθέντος των αυτοσυζυγών τελεστών, θα ορίσουμε και πάλι το φάσμα, και θα διατυπώσουμε τα αντίστοιχα θεωρήματα φασματικής διάσπασης σε μία γενικότερη μορφή.

**Ορισμός 3.14** (Φάσμα μη-φραγμένου τελεστή)**.** *Έστω $A$ ένας μη-φραγμένος τελεστής στο $\mathcal{H}$. Ορίζουμε το φάσμα:*

$$\mathrm{spec}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda \cdot \mathrm{Id} \textit{ δεν έχει φραγμένη αντίστροφο}\}$$

*Δηλαδή ένας αριθμός $\lambda$ ανήκει στο φάσμα $\mathrm{spec}(A)$ εάν δεν υπάρχει φραγμένος τελεστής $B$ με $B(\mathcal{H}) \subseteq \mathrm{dom}(A)$ και $(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})B = \mathrm{Id}$, $B(A - \lambda \cdot \mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$.*

Όπως και στην περίπτωση των φραγμένων τελεστών, το φάσμα ενός μη-φραγμένου αυτοσυζυγή τελεστή περιέχει μονάχα πραγματικούς αριθμούς. Για την απόδειξη παραθέτουμε τα ακόλουθα λήμματα, των οποίων η απόδειξη δεν διαφέρει ουσιαστικά από αυτή των Λημμάτων 3.1, 3.2.

**Λήμμα 3.5.** *Έστω $A$ ένας μη-φραγμένος τελεστής στο $\mathcal{H}$. Έχουμε:*

$$A(\mathrm{dom}(A))^{\perp} = \ker(A^*)$$

**Λήμμα 3.6.** *Εάν ο μη-φραγμένος τελεστής $A$ είναι αυτοσυζυγής, τότε για κάθε $\lambda = a + ib$ έχουμε:*

$$\big((A - \lambda \cdot \mathrm{Id})u, (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})u\big) \geqslant b^2(u, u)$$

Επίσης χρειαζόμαστε τα ακόλουθα δύο λήμματα:

**Λήμμα 3.7.** *Για κάθε μη-φραγμένο τελεστή $A$, ο συζυγής $A^*$ είναι κλειστός, δηλαδή το γράφημα $\mathrm{Gr}(A^*) \subseteq \mathcal{H}^2$ είναι κλειστό σύνολο.*

*Απόδειξη:* Υποθέτουμε ότι $u_k \to u$ και επίσης ότι $A^*u_k \to w$. Έχουμε τότε $(u_k, Av) = (A^*u_k, v)$, και με όρια $(u, Av) = (w, v)$. Κατά συνέπεια, $u \in \mathrm{dom}(A^*)$ και $A^*u = w$, το οποίο δείχνει ότι το γράφημα είναι κλειστό.

□

**Λήμμα 3.8.** *Έστω $A$ ένας κλειστός τελεστής και $\lambda \in \mathbb{C}$. Εάν υπάρχει $\varepsilon > 0$ με:*

$$||(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})u|| \geqslant \varepsilon \cdot ||u||$$

*τότε το $(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})(\mathrm{dom}(A))$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{H}$.*

*Απόδειξη:* Έστω $u_k \in (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})(\mathrm{dom}(A))$ με $u_k \to u$, για την οποία γράφουμε $u_k = (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})v_k$, $v_k \in \mathrm{dom}(A)$. Από την ανισότητα της υπόθεσης:

$$||v_k - v_\ell|| \leqslant (1/\varepsilon) \cdot ||u_k - u_\ell||$$

κι άρα η $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία, με όριο $v$. Εφόσον $u_k = (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})v_k$, έχουμε:

$$Av_k \to \lambda v + u$$

Επειδή ο $A$ είναι κλειστός τελεστής, $v \in \mathrm{dom}(A)$ και $Av = \lambda v + u$, και κατά συνέπεια $(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})v = u$. Αυτά δείχνουν ότι το $(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})(\mathrm{dom}(A))$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{H}$.

□

**Πρόταση 3.5.** *Για κάθε $A$ μη-φραγμένο αυτοσυζυγή τελεστή στο $\mathcal{H}$, έχουμε:*

$$\mathrm{spec}(A) \subseteq \mathbb{R}$$

*Απόδειξη:* Θεωρούμε $\lambda = a + ib \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, κι έχουμε από το Λήμμα 3.6:

$$\big((A - \lambda \cdot \mathrm{Id})u, (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})u\big) \geqslant b^2(u, u)$$

Αυτό δείχνει ότι η $A - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ είναι $1 - 1$. Αναλόγως κανείς δείχνει το αποτέλεσμα για το συζυγές του $\lambda$, κι οπότε από το Λήμμα 3.5:

$$(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})(\mathrm{dom}(A))^{\perp} = \ker(A^* - \overline{\lambda} \cdot \mathrm{Id}) = \{0\}$$

Οπότε το $(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})(\mathrm{dom}(A))$ είναι πυκνό στο $\mathcal{H}$. Από το Λήμμα 3.7, ο τελεστής $A = A^*$ είναι κλειστός, και άρα από το Λήμμα 3.8 το $(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})(\mathrm{dom}(A))$ είναι κλειστό. Σε συνδυασμό όμως με την πυκνότητα, δεν μπορεί παρά να συμβαίνει:

$$(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})(\mathrm{dom}(A)) = \mathcal{H}$$

Τέλος, από τη σχέση:

$$\big((A - \lambda \cdot \mathrm{Id})u, (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})u\big) \geqslant b^2(u,u)$$

έπεται και η συνέχεια της αντιστροφής.

□

Όλη αυτή η προετοιμασία μάς επιτρέπει να ξεκινήσουμε την ενασχόληση με την πρώτη μορφή του φασματικού θεωρήματος, μέσω των προβολικών μέτρων. Κύριο βήμα για την διατύπωση του θεωρήματος είναι η ολοκλήρωση προς τελεστές, που θα ξαναδούμε παρακάτω.

Υπενθυμίζουμε για το ακόλουθο ότι, για κάθε $v \in \mathcal{H}$, έχουμε ορίσει στην παράγραφο 3.3.1 το μέτρο $\mathscr{P}_v(E) = (v, \mathscr{P}(E)v)$.

**Πρόταση 3.6** (Ολοκλήρωση προς τελεστές - μη-φραγμένη εκδοχή)**.** *Έστω $(X, \mathcal{M})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $\mathscr{P}$ ένα προβολικό μέτρο με εικόνα στο $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Έστω επίσης $f : X \to \mathbb{C}$ μία $\mathcal{M}-$μετρήσιμη συνάρτηση και ο υπόχωρος του $\mathcal{H}$:*

$$W_f = \left\{ v \in \mathcal{H} \;\middle|\; \int_X |f|^2 \, d\mathscr{P}_v < \infty \right\}$$

*Υπάρχει τότε ένας μοναδικός μη-φραγμένος τελεστής $Tf$, που συμβολίζουμε με $\int_X f \, d\mathscr{P}$, στο $\mathcal{H}$, με πεδίο ορισμού $\mathrm{dom}(Tf) = W_f$ και:*

$$\left( v, \left( \int_X f \, d\mathscr{P} \right) v \right) = \int_X f \, d\mathscr{P}_v$$

*Απόδειξη:* Μιμούμενοι την απόδειξη της Πρότασης 3.4, θα δικαιολογήσουμε την επιλογή της τετραγωνικής μορφής $Q_f$. Ο χώρος $W_f$ είναι πυκνός στον $\mathcal{H}$ και η $Q_f : W_f \to \mathbb{C}$:

$$Q_f(v) = \int_X f \, d\mathscr{P}_v$$

είναι μία τετραγωγική μορφή στο $W_f$

Για την πυκνότητα, θεωρούμε τα σύνολα $E_k = \{x \in X \mid k < f(x) \leqslant k+1\}$. Εάν το $v$ ανήκει στην εικόνα του $\mathscr{P}(E_k)$, τότε $\mathscr{P}_v(E_k^c) = 0$ και:

$$\int_X |f|^2 \, d\mathscr{P}_v = \int_{E_k} |f|^2 \, d\mathscr{P}_v \leqslant k^2 \mathscr{P}_v(E_n) < \infty$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι $v \in W_f$, δηλαδή $\mathscr{P}(E_k)(\mathcal{H}) \subseteq W_f$. Επειδή τώρα $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} E_k = X$, έχουμε ότι οι εγκλεισμοί:

$$\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \mathscr{P}(E_k)(\mathcal{H}) \subseteq W_f \subseteq \mathcal{H}$$

είναι πυκνοί.

Εάν η $f$ είναι φραγμένη, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ήδη γνωστή ολοκλήρωση προς τελεστές και να πάρουμε:

$$Q_f(v) = \left(v, \left(\int_X f \, d\mathscr{P}\right) v\right)$$

που είναι μία τετραγωνική μορφή, με αντίστοιχη γραμμική-συζυγώς γραμμική μορφή:

$$L_f(u, v) = \left(u, \left(\int_X f \, d\mathscr{P}\right) v\right)$$

Η τελευταία μάλιστα είναι φραγμένη, αφού:

$$\left(\left(\int_X f \, d\mathscr{P}\right) v, \left(\int_X f \, d\mathscr{P}\right) v\right) = \left(v, \left(\int_X \overline{f} \cdot f \, d\mathscr{P}\right) v\right) = \int_X |f|^2 \, d\mathscr{P}_v$$

κι άρα:

$$|L_f(u, v)| \leqslant ||u|| \cdot \left|\left|\left(\int_X f \, d\mathscr{P}\right) v\right|\right| = ||u|| \cdot ||f||_{L^2(X; \mathscr{P}_v)}$$

Εάν η $f$ δεν είναι φραγμένη, μπορούμε να δουλέψουμε με τους περιορισμούς $f_n = f|_{\bigcup_{|k| \leqslant n} E_k}$. Λόγω του φράγματος, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχει νόημα το όριο $Q_f(v) = \lim_{n \to \infty} Q_{f_n}(v)$, το οποίο είναι τετραγωνική μορφή.

$\square$

Το φασματικό θεώρημα για μη-φραγμένους τελεστές, στην κλασική του μορφή, διατυπώνεται παρακάτω. Η απόδειξη, ως συνήθως, μπορεί να βρεθεί στο [14].

**Θεώρημα 3.3** (Φασματική διάσπαση για μη-φραγμένους τελεστές - κλασική εκδοχή)**.** *Θεωρούμε έναν μη-φραγμένο αυτοσυζυγή τελεστή $A$ στο $\mathcal{H}$. Υπάρχει μοναδικό προβολικό μέτρο $\mathscr{P}^A$ στο φάσμα $\operatorname{spec}(A)$, με τιμές στο $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, ούτως ώστε:*

$$A = \int_{\operatorname{spec}(A)} \lambda \, d\mathscr{P}^A(\lambda)$$

Η εναλλακτική μορφή του θεωρήματος μπορεί να διατυπωθεί άμεσα. Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [14].

**Θεώρημα 3.4** (Φασματική διάσπαση για μη-φραγμένους τελεστές - εναλλακτική εκδοχή)**.** *Θεωρούμε έναν μη-φραγμένο αυτοσυζυγή τελεστή $A$ στο $\mathcal{H}$. Υπάρχει μοναδικό $\sigma-$πεπερασμένο μέτρο $\mathscr{M}$ στο φάσμα $\operatorname{spec}(A)$, ένα ευθύ ολοκλήρωμα:*

$$\int^{\oplus}_{\operatorname{spec}(A)} \mathcal{H}_\lambda \, d\mathscr{M}(\lambda)$$

*κι ένας ορθομοναδιαίος τελεστής $U : \mathcal{H} \to \int^{\oplus}_{\operatorname{spec}(A)} \mathcal{H}_\lambda \, d\mathscr{M}(\lambda)$ ούτως ώστε:*

$$U(\operatorname{dom}(A)) = \left\{ s \in \int^{\oplus}_{\operatorname{spec}(A)} \mathcal{H}_\lambda \, d\mathscr{M}(\lambda) \;\middle|\; \int_{\operatorname{spec}(A)} \big(\lambda s(\lambda), \lambda s(\lambda)\big)_{\mathcal{H}_\lambda} \, d\mathscr{M}(\lambda) < \infty \right\}$$

*και για κάθε $s \in U(\operatorname{dom}(A))$:*

$$\big(UAU^{-1}(s)\big)(\lambda) = \lambda s(\lambda)$$

## 3.4 Το θεώρημα Stone-von Neumann

Είμαστε πλέον σε θέση να διατυπώσουμε το θεώρημα των Stone-von Neumann. Η ιδέα της απόδειξης (δεν θα δώσουμε απόδειξη) που θα παρουσιάσουμε διαφέρει από την απόδειξη του von Neumann, και είναι αυτή που παρατίθεται στο [18]. Για την ιστορική απόδειξη, η οποία είναι εξαιρετικά ενδιαφέρουσα, κανείς μπορεί να δει το [19], και μία τροποποιημένη εκδοχή στο [14].

**Θεώρημα 3.5** (Το θεώρημα των Stone-von Neumann)**.** *Έστω $P, Q$ δύο αυτοσυζυγείς τελεστές σε έναν χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, που ικανοποιούν τις κανονικές σχέσεις μετάθεσης:*

$$[P, Q] = i\hbar \cdot \mathrm{Id}$$

*(η συγκεκριμένη σταθερά δεν έχει στην πραγματικότητα σημαντικό ρόλο, καθώς είναι συνέπεια των μονάδων μέτρησης). Υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής $\mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R})$ μέσω του οποίου μπορεί να γίνει η ταύτιση:*

$$Q\Psi(x) = ix\Psi(x) \text{ και } P\Psi(x) = \partial\Psi(x)$$

*Ιδέα της απόδειξης:*

**Βήμα I:** Από την εναλλακτική μορφή του φασματικού θεωρήματος για μη-φραγμένους τελεστές, έχουμε ένα ευθύ ολοκλήρωμα

$$\oint^{\oplus}_{\mathrm{spec}(A)} \mathcal{H}_x \, d\mathscr{M}(x)$$

κι έναν ορθομοναδιαίο τελεστή $\mathcal{H} \to \oint^{\oplus}_{\mathrm{spec}(A)} \mathcal{H}_x \, d\mathscr{M}(x)$ με τον οποίον γίνεται η ταύτιση:

$$Q\Psi(x) = ix\Psi(x)$$

**Βήμα II:** Εφόσον μεταξύ των $P$, $Q$ υπάρχει κάποια σχέση (οι κανονικές σχέσεις μετάθεσης), θα πρέπει από τη μορφή του $Q$ να μπορέσει να εξαχθεί η μορφή του $P$. Ορίζουμε την μονοπαραμετρική οικογένεια $U_t = e^{Pt}$, και από τις σχέσεις μετάθεσης έχουμε:

$$U_t Q U_t^{-1} = Q + it \cdot \mathrm{Id}$$

Η σχέση αυτή μπορεί να ειδωθεί ως «μεταφορά των ιδιοχώρων», και συνέπεια είναι η ισομορφία $\mathcal{H}_x \cong \mathcal{K}$, $x \in \mathbb{R}$ (δηλαδή όλα είναι ισόμορφα μεταξύ τους).

**Βήμα III:** Τα $U_t$ ορίζουν συναρτήσεις $\sigma(\Diamond; t)$ με:

$$U_t\Psi(x) = \sigma(x;t)\Psi(x+t) \text{ και } \sigma(x;t) = \sigma(x;t)^{-1}\sigma(x+t;t)$$

Από το παραπάνω έπεται ότι οι $U_t$ είναι στην ουσία μεταφορές.

$$U_t\Psi(x) = \psi(x-t)$$

**Βήμα IV:** Ο μόνος τελεστής $P$ που δίνει $U_t = e^{Pt}$ με τις παραπάνω ιδιότητες είναι ο τελεστής της παραγώγου $\partial$.

□

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4**

# Ο αρμονικός ταλαντωτής

## 4.1 Ο αρμονικός ταλαντωτής με έναν βαθμό ελευθερίας

## 4.2 Η αναπαράσταση Bargmann-Fock-Friedrichs-Segal-Shale-Weil

# Βιβλιογραφία


## Ανάλυση Fourier, τελεστές, μέτρο και κατανομές:

[1] Folland.: ***Real Anaysis - Modern Techniques and Applications*** (John Wiley & Sons, 1999)

[2] Grafakos L.: ***Classical Fourier Analysis*** (Springer, 2010)

[3] Melrose R.: ***Introduction to Microlocal Analysis*** (MIT, 2007)

[4] Γιαλελής Ν.: ***Θεωρία Κατανομών*** (ΕΚΠΑ, 2024)

[5] Κατάβολος Α.: ***Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών*** (Συμμετρία, 2008 [επικαιροποίηση: 2022])

[6] Φράγκος Α.: ***Βάσεις Schauder*** (ΕΚΠΑ, 2023)

## Γεωμετρία:

[7] Boothby W.: ***An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*** (Academic Press 1986)

[8] Φράγκος Α.: ***Γεωμετρική Πλειογραμμική Άλγεβρα*** (ΕΚΠΑ, 2024)

## Διαφορικές εξισώσεις:

[9] Evans L.C.: ***Partial Differential Equations*** (AMS, 2010)

[10] Strauss W.: ***Partial Differential Equations*** (John Wiley & Sons, 2008)

## Θεωρία αναπαραστάσεων και φυσική:

[11] Dirac P.: ***The Fundamental Equations of Quantum Mechanics*** (Proceedings of the Royal Society A: Mathematical and Engineering Sciences, 1925)

[12] Chan C.: ***The Weil Representation*** (Princeton University, 2012)

[13] Folland G. B.: ***Harmonic Analysis in phase space*** (Princeton University Press, 1989)

[14] Hall B.: ***Quantum Theory for Mathematicians*** (Springer 2013)

[15] Kosmann-Schwarzbach Y.: ***Groups and Symmetries*** (Springer, 2010)

[16] Likharev K.: ***Essential Graduate Physics - Quantum Mechanics*** (University of Sheffield, LibreTexts, 2023)

[17] Gasiorowicz S.: ***Quantum Physics*** (John Wiley & Sons, 2003)

[18] Gurarie D.: ***Symmetries and Laplacians*** (North-Holland, 1992)

[19] Rosenberg J.: ***A Selective Hystory of the Stone-von Neumann Theorem*** (AMS Contemporary Mathematics, 2003)

[20] Woit P.: ***The Heisenberg Group and its Representations*** (Mathematics GR6434, 2023)

[21] Woit P.: ***Quantum Theory, Groups and Representations*** (Dept. of Mathematics, Columbia University, 2022)

[22] Μαυρόπουλος Φ.: ***Κβαντική Μηχανική*** (ΕΚΠΑ, 2022)